

BTS TRAVAUX PUBLICS

Mathématiques

Support de cours complet

1ère et 2ème année — Référentiel 2023

Cours illustré, exemples résolus, exercices d'application corrigés et évaluations QCM de fin de module, pour les 10 modules du Groupement B1 (arrêté du 4 juin 2013).

Sommaire

1ère année

Module A — Suites numériques

Module B — Fonctions d'une variable réelle

Module C — Calcul intégral

Module D — Nombres complexes

Module E — Statistique descriptive

Module F — Probabilités 1

2ème année

Module G — Probabilités 2

Module H — Statistique inférentielle

Module I — Calcul matriciel

Module J — Équations différentielles

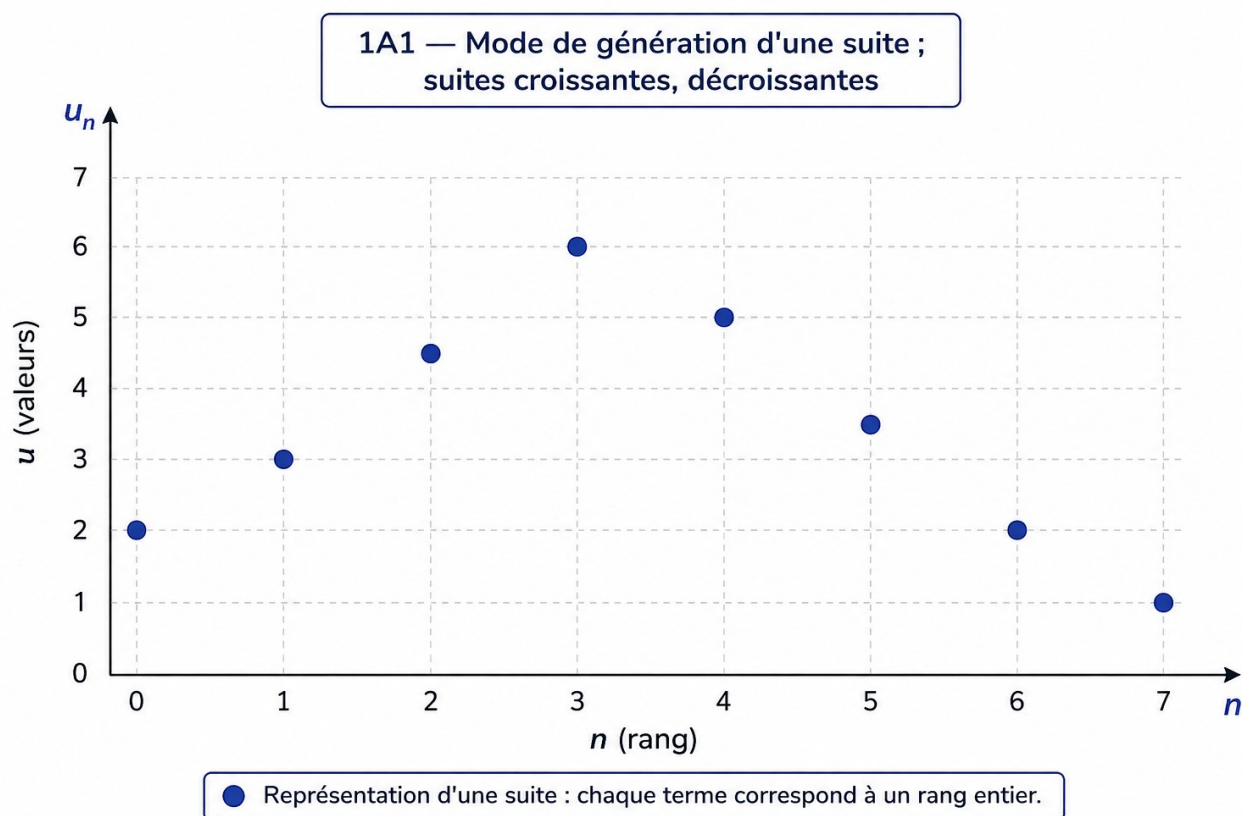
Module A — Suites numériques

1^{ère} année

Notions du module

Code	Notion	Durée (h)
1A1	Mode de génération d'une suite ; suites croissantes, décroissantes	1
1A2	Suites arithmétiques : terme général, somme de termes consécutifs	1
1A3	Suites géométriques : terme général, somme de termes consécutifs	1
1A4	Limite d'une suite géométrique ; recherche de seuils	2

1A1 — Mode de génération d'une suite ; suites croissantes, décroissantes



Une suite numérique est une liste ordonnée de nombres réels, indexée par les entiers naturels. Elle permet de modéliser l'évolution d'une grandeur qui prend des valeurs à des instants ou des étapes discrets (année par année, couche par couche, mois par mois).

Définition

Une suite numérique (u_n) est une fonction qui, à tout entier naturel n (ou à tout entier naturel $n \geq n_0$), associe un réel u_n appelé terme de rang n (ou terme d'indice n). u_0 est le premier terme si la suite est définie à partir de $n = 0$.

Modes de génération d'une suite

Une suite peut être définie de deux façons principales :

- explicitement, par une formule donnant u_n en fonction de n directement, par exemple $u_n = 3n + 2$;
- par récurrence, en donnant le premier terme et une relation qui permet de calculer chaque terme à partir du (ou des) terme(s) précédent(s), par exemple $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 2u_n - 1$.

Calcul de termes

Pour une suite définie explicitement, on calcule u_n en remplaçant n par sa valeur. Pour une suite définie par récurrence, on calcule les termes de proche en proche : u_0 , puis u_1 à partir de u_0 , puis u_2 à partir de u_1 , etc. Ce calcul est naturellement adapté à une programmation par boucle (« pour » ou « tant que ») sur calculatrice, tableur ou dans un langage comme Python.

Sens de variation

Une suite (u_n) est croissante si, pour tout n , $u_{n+1} \geq u_n$ (chaque terme est supérieur ou égal au précédent). Elle est décroissante si, pour tout n , $u_{n+1} \leq u_n$. En pratique, sur un intervalle d'étude donné, on étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$, ou l'on compare le quotient u_{n+1} / u_n à 1 lorsque tous les termes sont strictement positifs.

Représentation graphique

On représente une suite par un nuage de points ($n ; u_n$) — les points ne sont pas reliés entre eux, car n varie de façon discrète (on ne définit pas u_n pour n non entier). Cette représentation, obtenue à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, permet de visualiser rapidement le comportement global d'une suite (croissance, décroissance, stabilisation, oscillation).

Exemple résolu

Énoncé

Le tassement d'un remblai routier est modélisé par la suite (u_n) définie par $u_0 = 12$ (tassement initial en mm) et, pour tout entier n , $u_{n+1} = 0,8 u_n + 1$.

- 1) Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
- 2) Étudier le sens de variation de la suite sur ces premiers termes.

Résolution

1) $u_1 = 0,8 \times 12 + 1 = 9,6 + 1 = 10,6$

$u_2 = 0,8 \times 10,6 + 1 = 8,48 + 1 = 9,48$

$u_3 = 0,8 \times 9,48 + 1 = 7,584 + 1 = 8,584$

2) $u_1 - u_0 = 10,6 - 12 = -1,4 < 0$; $u_2 - u_1 = 9,48 - 10,6 = -1,12 < 0$; $u_3 - u_2 = 8,584 - 9,48 = -0,896 < 0$.

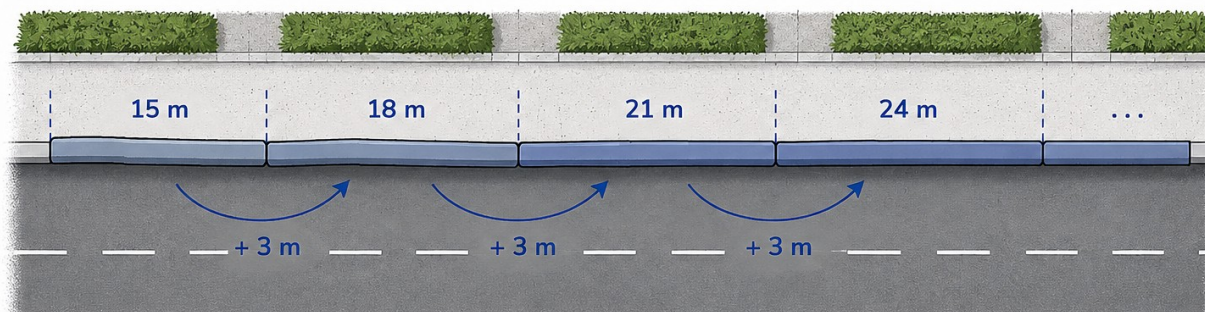
Sur ces premiers termes, chaque différence est négative : la suite est décroissante (le tassement diminue progressivement, ce qui est cohérent avec un phénomène qui se stabilise).

Applications métiers (Travaux Publics) : Modélisation de l'évolution de grandeurs discrètes : amortissement d'un emprunt, tassement d'un remblai par couches successives, dégradation périodique d'un revêtement, suivi d'indicateurs de chantier période par période.

1A2 — Suites arithmétiques : terme général, somme de termes consécutifs

1A2 — Suites arithmétiques : terme général, somme de termes consécutifs

Exemple concret : pose de tronçons de bordure de trottoir de longueurs croissantes



Suite arithmétique

premier terme : $u_1 = 15$ m
raison : $r = 3$ m

Terme général :

$$u_n = u_1 + (n-1) \times r$$
$$u_n = 15 + (n-1) \times 3$$
$$= 12 + 3n$$

Somme de n termes consécutifs :

$$S_n = \frac{n}{2} \times (u_1 + u_n)$$

avec $u_n = u_1 + (n-1) \times r$



À chaque nouveau tronçon, on ajoute toujours $r = 3$ m.
Les longueurs forment une suite arithmétique croissante.

Tronçon de bordure

Joint entre deux tronçons

Les suites arithmétiques modélisent une évolution à variation constante : on ajoute (ou on retranche) toujours la même quantité d'un terme au suivant.

Définition

Une suite (u_n) est arithmétique s'il existe un réel r , appelé raison, tel que pour tout n , $u_{n+1} = u_n + r$. Autrement dit, on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours la même valeur r .

Terme général

Si (u_n) est arithmétique de premier terme u_0 et de raison r , alors pour tout entier naturel n : $u_n = u_0 + n \times r$. Plus généralement, entre deux termes quelconques d'indices p et n : $u_n = u_p + (n - p) \times r$.

Somme de termes consécutifs

La somme S des n premiers termes d'une suite arithmétique (de u_0 à u_{n-1} , soit n termes) est donnée par :

$$S = n \times (\text{premier terme} + \text{dernier terme}) / 2.$$

Cette formule, dite « somme = nombre de termes $\times$ moyenne du premier et du dernier terme », reste valable pour la somme de termes consécutifs quelconques d'une suite arithmétique. En pratique, on utilise la calculatrice ou un tableur (fonction somme) pour vérifier ou calculer rapidement cette somme sur un grand nombre de termes.

Exemple résolu

Énoncé

Une entreprise de travaux publics prévoit de poser des bordures de trottoir par tronçons de longueur croissante. Le premier tronçon mesure 15 m et chaque tronçon suivant est 3 m plus long que le précédent.

- 1) Exprimer la longueur ℓ_n du tronçon de rang n (le premier tronçon étant de rang 0) en fonction de n .
- 2) Calculer la longueur du 10^e tronçon (rang 9).
- 3) Calculer la longueur totale posée pour les 10 premiers tronçons.

Résolution

- 1) La suite (ℓ_n) est arithmétique de premier terme $\ell_0 = 15$ et de raison $r = 3$, donc $\ell_n = 15 + 3n$.

2) $\ell_9 = 15 + 3 \times 9 = 15 + 27 = 42$ m.

3) Somme des 10 premiers termes (rangs 0 à 9) : $S = 10 \times (\ell_0 + \ell_9) / 2 = 10 \times (15 + 42) / 2 = 10 \times 57 / 2 = 285$ m.

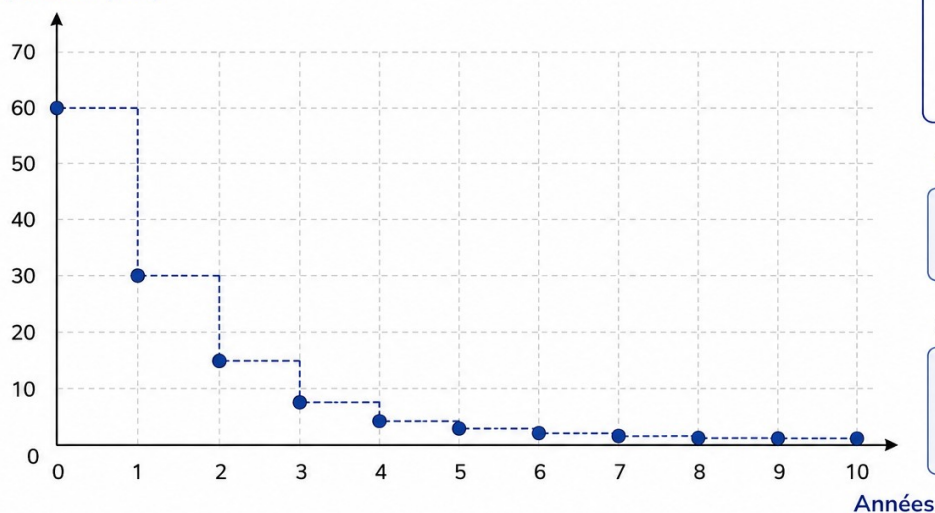
Applications métiers (Travaux Publics) : *Modélisation de l'évolution de grandeurs discrètes : amortissement d'un emprunt, tassement d'un remblai par couches successives, dégradation périodique d'un revêtement, suivi d'indicateurs de chantier période par période.*

1A3 — Suites géométriques : terme général, somme de termes consécutifs

1A3 — Suites géométriques : terme général, somme de termes consécutifs

Décroissance de l'épaisseur d'une couche de chaussée au fil des années (suite géométrique décroissante)

Épaisseur (mm)



Suite géométrique

premier terme : $u_0 = 60$ mm

raison : $q = 0,5$ ($0 < q < 1$)

Terme général :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

$$u_n = 60 \times (0,5)^n$$

Somme de $n + 1$ termes :

$$S_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

avec $0 < q < 1$



Chaque année, l'épaisseur est multipliée par $q = 0,5$.

La suite décroît et tend vers 0 : l'épaisseur se stabilise autour d'un palier très faible.

- Épaisseur mesurée chaque année
- Évolution (facteur $q = 0,5$ par an)

Les suites géométriques modélisent une évolution à taux constant : chaque terme est obtenu en multipliant le précédent par un même facteur (croissance ou décroissance exponentielle discrète).

Définition

Une suite (u_n) est géométrique s'il existe un réel q , appelé raison, tel que pour tout n , $u_{n+1} = q \times u_n$. On passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par la même valeur q .

Terme général

Si (u_n) est géométrique de premier terme u_0 (non nul) et de raison q (non nulle), alors pour tout entier naturel n : $u_n = u_0 \times q^n$. Plus généralement, entre deux termes d'indices p et n : $u_n = u_p \times q^{(n-p)}$.

Somme de termes consécutifs

Si $q \neq 1$, la somme S des n premiers termes (de u_0 à u_{n-1}) d'une suite géométrique de raison q est :

$$S = u_0 \times (1 - q^n) / (1 - q).$$

Cette formule est fournie dans le référentiel si nécessaire ; en pratique on la met en œuvre à la calculatrice ou au tableur plutôt que de la redémontrer.

Contexte

Les suites géométriques modélisent typiquement une évolution en pourcentage constant : une augmentation de t % par étape correspond à une raison $q = 1 + t/100$, une diminution de t % correspond à $q = 1 - t/100$.

Exemple résolu

Énoncé

Un matériau de chaussée perd 4 % de son épaisseur utile chaque année sous l'effet de l'usure. L'épaisseur initiale est de 80 mm.

- 1) Modéliser l'épaisseur e_n (en mm) après n années par une suite géométrique ; donner sa raison q .
- 2) Calculer l'épaisseur restante après 5 ans.
- 3) Calculer, à l'aide de la formule de la somme, la somme $e_0 + e_1 + \dots + e_4$.

Résolution

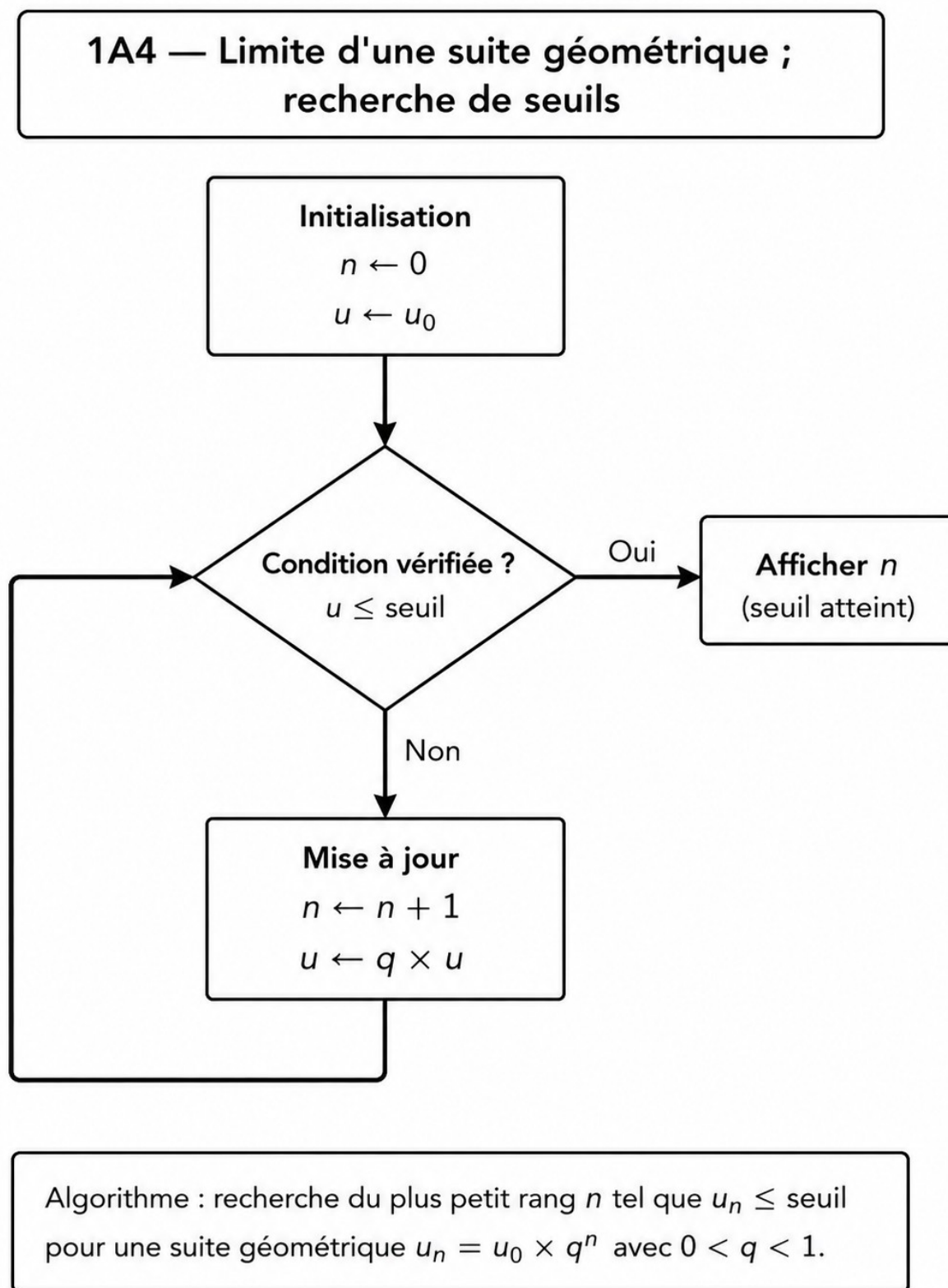
1) Une perte de 4 % par an correspond à une raison $q = 1 - 4/100 = 0,96$. La suite (e_n) est géométrique de premier terme $e_0 = 80$ et de raison $q = 0,96$: $e_n = 80 \times 0,96^n$.

2) $e_5 = 80 \times 0,96^5 \approx 80 \times 0,8154 \approx 65,2$ mm.

3) Somme des 5 premiers termes ($n = 5$, rangs 0 à 4) : $S = 80 \times (1 - 0,96^5) / (1 - 0,96) = 80 \times (1 - 0,8154) / 0,04 \approx 80 \times 4,614 \approx 369,1$ (somme des épaisseurs des 5 premières années, sans signification physique directe mais utile, par exemple, pour un calcul de moyenne).

Applications métiers (Travaux Publics) : *Modélisation de l'évolution de grandeurs discrètes : amortissement d'un emprunt, tassement d'un remblai par couches successives, dégradation périodique d'un revêtement, suivi d'indicateurs de chantier période par période.*

1A4 — Limite d'une suite géométrique ; recherche de seuils



On s'intéresse ici au comportement d'une suite géométrique lorsque n devient très grand, et à la recherche pratique, à l'aide d'un algorithme, du rang à partir duquel un terme franchit un seuil donné.

Comportement d'une suite géométrique à l'infini

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 \neq 0$ et de raison q :

- si $q > 1$ et $u_0 > 0$, la suite tend vers $+\infty$ (croissance exponentielle) ;
- si $0 < q < 1$, la suite tend vers 0 (décroissance vers zéro) ;

- si $q = 1$, la suite est constante ;
- si $-1 < q < 0$, la suite tend vers 0 en oscillant de signe ;
- si $q \leq -1$, la suite n'a pas de limite (elle oscille avec une amplitude qui reste constante ou augmente).

Ce comportement s'observe expérimentalement à l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice, en calculant un grand nombre de termes.

Notion de seuil

On appelle seuil un rang n_0 à partir duquel la suite (u_n) vérifie une condition donnée pour tout $n \geq n_0$, par exemple $u_n \geq a$ (a réel donné) ou $|u_n| \leq 10^{-p}$ (p entier naturel donné, correspondant à une précision recherchée).

Recherche algorithmique d'un seuil

On détermine ce rang à l'aide d'un algorithme simple, reposant sur une boucle « tant que » : on initialise n à 0 et u à u_0 , puis, tant que la condition n'est pas vérifiée, on incrémente n de 1 et on met à jour u ($u \leftarrow q \times u$) ; la boucle s'arrête dès que la condition est satisfaite, et n contient alors le rang cherché. Ce type de programme peut être écrit sur calculatrice, en Python, ou reconstitué à l'aide des fonctions d'un tableur (recopie vers le bas jusqu'à atteindre la condition).

Exemple résolu

Énoncé On reprend la suite (e_n) de l'épaisseur de chaussée, $e_n = 80 \times 0,96^n$ (en mm). 1) Quelle est la limite de la suite (e_n) lorsque n tend vers $+\infty$? Interpréter. 2) Écrire un algorithme permettant de déterminer le plus petit rang n à partir duquel $e_n < 50$ (seuil réglementaire de renouvellement de la couche de roulement). 3) Déterminer ce rang par le calcul (à l'aide d'essais successifs ou d'un tableur).
Résolution 1) Comme $0 < 0,96 < 1$, la suite géométrique (e_n) tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$: l'épaisseur s'use indéfiniment vers 0 dans ce modèle théorique (en pratique, un entretien intervient bien avant). 2) Algorithme : <pre> n ← 0 e ← 80 Tant que e ≥ 50 : e ← 0,96 × e n ← n + 1 Afficher n </pre> 3) En itérant : $e_0=80$, $e_1=76,8$, $e_2=73,73$, $e_3=70,78$, $e_4=67,95$, $e_5=65,23$, $e_6=62,62$, $e_7=60,11$, $e_8=57,71$, $e_9=55,4$, $e_{10}=53,19$, $e_{11}=51,06$, $e_{12}=49,02$. Le seuil $e_n < 50$ est franchi pour la première fois au rang $n = 12$ ($e_{12} \approx 49,0 \text{ mm} < 50 \text{ mm}$) : il faut prévoir un renouvellement de couche de roulement avant la 12^e année.

Applications métiers (Travaux Publics) : Modélisation de l'évolution de grandeurs discrètes : amortissement d'un emprunt, tassement d'un remblai par couches successives, dégradation périodique d'un revêtement, suivi d'indicateurs de chantier période par période.

Exercices d'application

Ex. A1 — Emprunt pour l'achat d'un engin de chantier

Énoncé

Une entreprise contracte un emprunt de 50 000 € remboursé par annuités constantes. Le capital restant dû après n années, noté C_n , vérifie $C_0 = 50\,000$ et $C_{n+1} = 1,03 \times C_n - 6\,500$.

- 1) Calculer C_1 et C_2 .
- 2) Écrire un algorithme permettant de déterminer le nombre d'années nécessaires pour que le capital restant dû devienne négatif ou nul (l'emprunt est alors soldé).
- 3) En itérant le calcul, déterminer ce nombre d'années.

Corrigé

1) $C_1 = 1,03 \times 50\,000 - 6\,500 = 51\,500 - 6\,500 = 45\,000$.

$C_2 = 1,03 \times 45\,000 - 6\,500 = 46\,350 - 6\,500 = 39\,850$.

2) Algorithme :

$n \leftarrow 0$

$C \leftarrow 50\,000$

Tant que $C > 0$:

$C \leftarrow 1,03 \times C - 6\,500$

$n \leftarrow n + 1$

Afficher n

3) En itérant : $C_0=50\,000$, $C_1=45\,000$, $C_2=39\,850$, $C_3=34\,545,50$, $C_4=29\,081,87$, $C_5=23\,454,32$, $C_6=17\,657,95$, $C_7=11\,687,69$, $C_8=5\,538,32$, $C_9 = 1,03 \times 5\,538,32 - 6\,500 = 5\,704,47 - 6\,500 = -795,53$.

Le capital restant dû devient négatif au bout de $n = 9$ ans : l'emprunt est soldé à la 9^e annuité (la dernière annuité étant en réalité ajustée pour ne pas dépasser le capital restant, mais le modèle donne bien un ordre de grandeur de 9 ans).

Ex. A2 — Renouvellement d'un parc de compacteurs

Énoncé

Une entreprise possède 8 compacteurs. Chaque année, elle revend 25 % de son parc (usure, obsolescence) et achète 3 compacteurs neufs. On note p_n le nombre de compacteurs possédés après n années, avec $p_0 = 8$ et $p_{n+1} = 0,75 p_n + 3$.

- 1) Calculer p_1 , p_2 et p_3 (arrondis à l'unité).
- 2) La suite (p_n) semble-t-elle croissante, décroissante, ou se stabiliser ? Justifier sur les valeurs calculées.

Corrigé

1) $p_1 = 0,75 \times 8 + 3 = 6 + 3 = 9$.

$p_2 = 0,75 \times 9 + 3 = 6,75 + 3 = 9,75 \approx 10$.

$p_3 = 0,75 \times 9,75 + 3 = 7,3125 + 3 = 10,3125 \approx 10$.

2) $p_0 = 8 < p_1 = 9 < p_2 \approx 9,75 < p_3 \approx 10,31$: les valeurs augmentent mais de moins en moins vite (les écarts successifs 1 ; 0,75 ; 0,5625 diminuent) : la suite semble croissante et se stabiliser progressivement vers une valeur limite (que l'on retrouverait en résolvant $\ell = 0,75\ell + 3$, soit $\ell = 12$ compacteurs).

Évaluation de fin de module (QCM)

Question 1. Une suite (u_n) vérifie $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = u_n + 3$ pour tout n . Quelle est la nature de cette suite ?

A. Arithmétique de raison 3 ✓ (réponse correcte)

B. Géométrique de raison 3

C. Arithmétique de raison 5

D. Ni arithmétique ni géométrique

Explication : On ajoute toujours 3 pour passer d'un terme au suivant : la suite est arithmétique de raison 3 (premier terme 5).

Question 2. Soit (u_n) une suite géométrique de raison q avec $0 < q < 1$ et $u_0 > 0$. Que vaut la limite de (u_n) quand n tend vers $+\infty$?

A. $+\infty$

B. 0 ✓ (réponse correcte)

C. u_0

D. Elle n'a pas de limite

Explication : Pour une suite géométrique de raison q telle que $0 < q < 1$, la suite tend vers 0.

Question 3. Une suite arithmétique a pour premier terme $u_0 = 4$ et pour raison $r = 5$. Que vaut u_{10} ?

A. 45

B. 50

C. 54 ✓ (réponse correcte)

D. 59

Explication : $u_n = u_0 + n \times r$, donc $u_{10} = 4 + 10 \times 5 = 4 + 50 = 54$.

Question 4. Pour une suite arithmétique de premier terme 2 et telle que le 10^e terme (u_9) vaut 20, quelle est la somme des 10 premiers termes (de u_0 à u_9) ?

A. 100

B. 110 ✓ (réponse correcte)

C. 120

D. 220

Explication : $S = n \times (\text{premier terme} + \text{dernier terme}) / 2 = 10 \times (2 + 20) / 2 = 10 \times 11 = 110$.

Question 5. Pour rechercher, par algorithme, le rang à partir duquel une suite géométrique décroissante passe sous un seuil donné, quelle structure de contrôle utilise-t-on typiquement ?

A. Une boucle « pour » à nombre d'itérations fixé à l'avance

B. Une boucle « tant que » ✓ (réponse correcte)

C. Une instruction conditionnelle « si »

D. Aucune boucle n'est nécessaire

Explication : Le nombre d'itérations n'étant pas connu à l'avance, on utilise une boucle « tant que » qui s'arrête dès que la condition (le seuil) est atteinte.

Module B — Fonctions d'une variable réelle

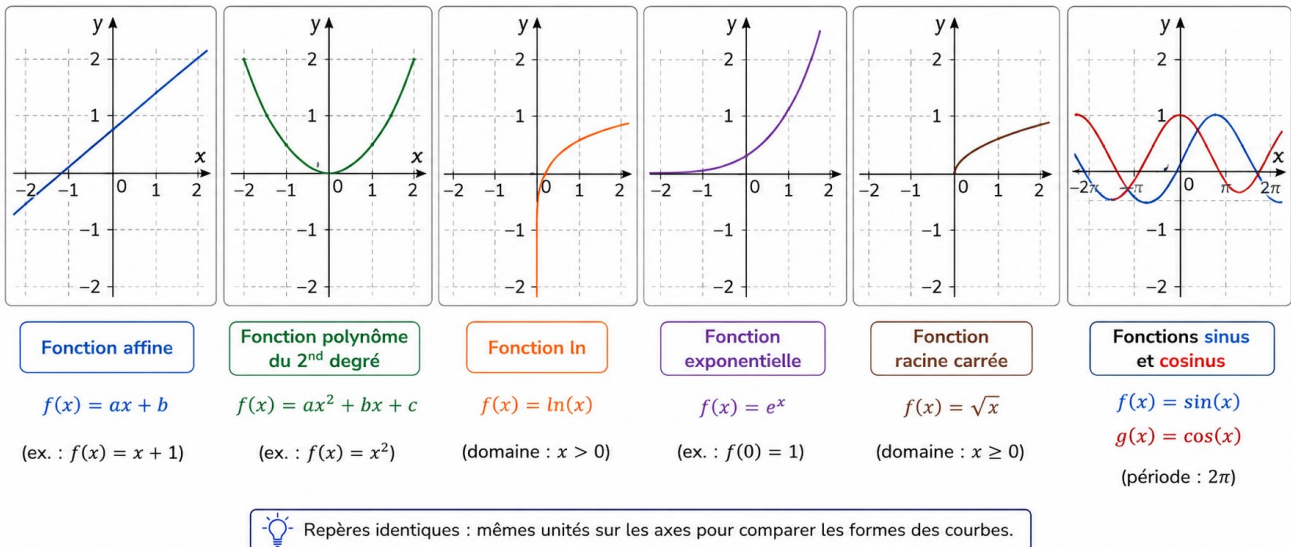
1ère année

Notions du module

Code	Notion	Durée (h)
1B1	Fonctions de référence (affine, polynôme du 2nd degré, ln, exp, racine carrée, sinus, cosinus)	1
1B2	Dérivation : dérivées usuelles, opérations sur les dérivées	2
1B3	Étude des variations d'une fonction ; tableau de variation	2
1B4	Recherche d'une valeur approchée d'une racine (balayage, dichotomie, méthode de Newton)	2
1B5	Limites de fonctions ; asymptotes	2
1B6	Développement limité en 0 d'une fonction ; tangente	1
1B7	Courbes paramétrées (exemples polynomiaux)	1

1B1 — Fonctions de référence

1B1 — Fonctions de référence



Certaines fonctions usuelles reviennent constamment dans la modélisation de phénomènes techniques ; il est indispensable d'en connaître la courbe représentative et les propriétés de base pour les reconnaître et les exploiter rapidement.

Fonctions affines

$f(x) = ax + b$, représentée par une droite de coefficient directeur a et d'ordonnée à l'origine b . Croissante si $a > 0$, décroissante si $a < 0$, constante si $a = 0$.

Fonctions polynômes du 2nd degré

$f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), représentée par une parabole, de sommet d'abscisse $-b/(2a)$. La parabole est tournée vers le haut si $a > 0$ (minimum au sommet), vers le bas si $a < 0$ (maximum au sommet).

Fonction logarithme népérien

$f(x) = \ln(x)$, définie et strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$, avec $\ln(1) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} = +\infty$. Elle transforme un produit en somme : $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

Fonction exponentielle de base e

$f(x) = e^x$, définie et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec $e^0 = 1$, valeurs toujours strictement positives, $\lim_{x \rightarrow -\infty} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} = +\infty$. Elle transforme une somme en produit : $e^{a+b} = e^a \times e^b$. C'est la fonction réciproque du logarithme népérien.

Fonction racine carrée

$f(x) = \sqrt{x}$, définie sur $[0 ; +\infty[$, strictement croissante, courbe partant de l'origine avec une tangente verticale en 0.

Fonctions sinus et cosinus

Fonctions périodiques de période 2π , à valeurs dans $[-1 ; 1]$, utilisées pour modéliser des phénomènes vibratoires ou cycliques (mouvements oscillants, signaux électriques alternatifs).

Exemple résolu

Énoncé

Sans calcul, à partir des propriétés des fonctions de référence, indiquer :

- 1) le sens de variation de $f(x) = -2x + 5$;
- 2) le signe de $\ln(x)$ pour $x \in]0 ; 1[$;
- 3) le signe de e^x pour tout réel x .

Résolution

- 1) f est affine de coefficient directeur $a = -2 < 0$: f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
- 2) $\ln$ est strictement croissante avec $\ln(1) = 0$; pour $x \in]0 ; 1[$, on a $x < 1$ donc $\ln(x) < \ln(1) = 0$: $\ln(x)$ est

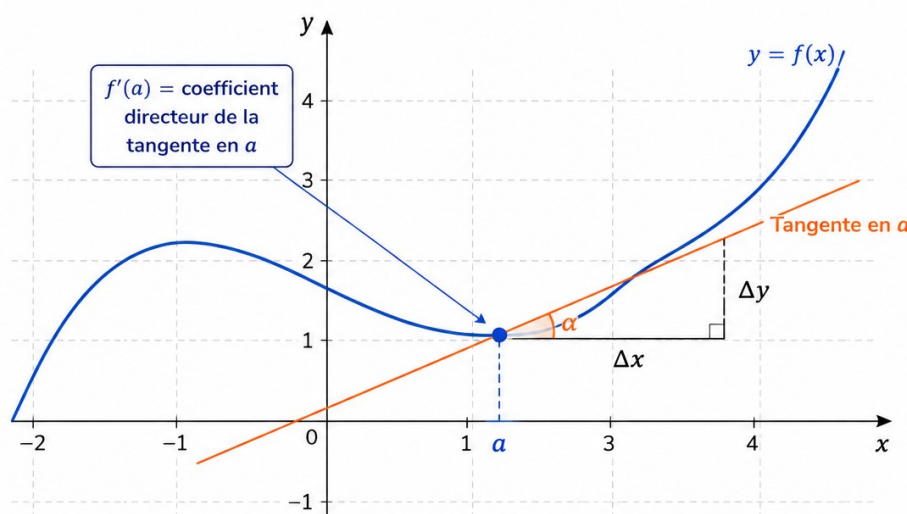
négatif sur $]0 ; 1[$.

3) La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ tout entier : $e^x > 0$ pour tout réel x .

Applications métiers (Travaux Publics) : *Modélisation de phénomènes continus issus des disciplines professionnelles : profils en long et en travers, courbes d'assemblage de chaussée, lois d'évolution de résistance ou de déformation d'un matériau, dimensionnement d'ouvrages.*

1B2 — Dérivation : dérivées usuelles, opérations sur les dérivées

1B2 — Dérivation : dérivées usuelles, opérations sur les dérivées



Le coefficient directeur (pente) de la tangente est :

$$f'(a) = \tan(\alpha) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Δx : accroissement de l'abscisse

Δy : accroissement de l'ordonnée

α : angle entre la tangente et l'axe des x

Dérivées usuelles

- $(k)' = 0$
- $(x)' = 1$
- $(ku)' = k u'$
- $(u + v)' = u' + v'$
- $(uv)' = u'v + u v'$
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u v'}{v^2} \quad (v \neq 0)$
- $(u \circ v)' = (u' \circ v) \times v'$

Dérivées de fonctions usuelles

- $(x^n)' = nx^{n-1} \quad (n \in \mathbb{R})$
- $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0)$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$

Le nombre dérivé et la fonction dérivée permettent d'étudier localement le comportement d'une fonction (pente de la tangente, variations) ; ils sont à la base de nombreuses méthodes d'optimisation et de modélisation.

Dérivées de référence

$(x^n)' = n x^{n-1}$; $(1/x)' = -1/x^2$; $(\sqrt{x})' = 1/(2\sqrt{x})$; $(\ln x)' = 1/x$; $(e^x)' = e^x$; $(\sin x)' = \cos x$; $(\cos x)' = -\sin x$.

Opérations sur les dérivées

$(u + v)' = u' + v'$; $(ku)' = k u'$ (k constante) ; $(uv)' = u'v + uv'$; $(u/v)' = (u'v - uv') / v^2$ (avec $v \neq 0$).

Dérivées de fonctions composées usuelles

Pour u une fonction dérivable :

$(u^n)' = n u' u^{n-1}$ (n entier naturel non nul) ;

$(\ln(u))' = u'/u$ (lorsque $u > 0$) ;

$(e^u)' = u' e^u$.

Interprétation graphique

Le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a . Cette tangente a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Outils

En pratique, le calcul de dérivée se fait à la main pour les cas simples (polynômes, fonctions usuelles composées simplement) et à l'aide d'un logiciel de calcul formel (calculatrice graphique, tableur avec extension, logiciel dédié) dans tous les autres cas.

Exemple résolu

Énoncé

Soit $f(x) = x^2 \times \ln(x)$, définie sur $]0 ; +\infty[$.

1) Calculer $f'(x)$.

2) Calculer $f'(1)$ et en déduire l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.

Résolution

1) On pose $u(x) = x^2$ et $v(x) = \ln(x)$, avec $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 1/x$.

$$f'(x) = u'v + uv' = 2x \times \ln(x) + x^2 \times (1/x) = 2x \ln(x) + x.$$

$$2) f'(1) = 2 \times 1 \times \ln(1) + 1 = 2 \times 1 \times 0 + 1 = 1.$$

$$f(1) = 1^2 \times \ln(1) = 0.$$

$$\text{Équation de la tangente en } x = 1 : y = f'(1)(x - 1) + f(1) = 1 \times (x - 1) + 0 = x - 1.$$

Applications métiers (Travaux Publics) : *Modélisation de phénomènes continus issus des disciplines professionnelles : profils en long et en travers, courbes d'assemblage de chaussée, lois d'évolution de résistance ou de déformation d'un matériau, dimensionnement d'ouvrages.*

1B3 — Étude des variations d'une fonction ; tableau de variation

1B3 — Étude des variations d'une fonction ; tableau de variation

Exemple : soit f une fonction définie et dérivable sur $[-2 ; 6]$ dont on étudie les variations.

x	-2	-1	1	3	6
Signe de $f'(x)$	+	0	-	0	-
Variations de f					
Extrema		Maximum local $f(-1) = 4$	Minimum local $f(1) = -2$	Maximum local $f(3) = 5$	

Règles de lecture :

- $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ est croissante
- $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ est décroissante
- $f'(x) = 0$ avec changement de signe
 $\Rightarrow$ extremum local

Conclusion :

f est croissante sur $[-2 ; -1]$ et sur $[1 ; 3]$.
 f est décroissante sur $[-1 ; 1]$ et sur $[3 ; 6]$.
 f admet un maximum local en $x = -1$ égal à 4
et un maximum local en $x = 3$ égal à 5.
 f admet un minimum local en $x = 1$ égal à -2.

Le signe de la dérivée renseigne directement sur le sens de variation de la fonction ; cette étude, synthétisée dans un tableau de variation, permet de répondre à de nombreuses questions pratiques (extremum, nombre de solutions d'une équation).

Lien signe de f' / variations de f

Si $f'(x) \geq 0$ sur un intervalle I (et f' non identiquement nulle sur aucun sous-intervalle), alors f est croissante sur I . Si $f'(x) \leq 0$ sur I , alors f est décroissante sur I .

Tableau de variation

On y résume, sur une ligne, le signe de $f'(x)$, et sur la ligne suivante, les variations de f (flèches montantes/descendantes) avec les valeurs de f aux bornes et aux points où f' s'annule en changeant de signe.

Extremum local

Si f' s'annule en changeant de signe en $x = a$, alors f admet un extremum local (maximum si f' passe de $+$ à $-$, minimum si f' passe de $-$ à $+$) en $x = a$, de valeur $f(a)$.

Nombre de solutions de $f(x) = k$

Le tableau de variation permet, par simple lecture, de déterminer combien de fois une équation $f(x) = k$ admet une solution sur un intervalle donné (en comparant k aux valeurs prises par f aux extrema et aux bornes).

Exemple résolu

Énoncé

Soit f définie sur $[0 ; 4]$ par $f(x) = x^2 - 4x + 3$, de dérivée $f'(x) = 2x - 4$.

1) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0 ; 4]$ et dresser le tableau de variation de f .

2) En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $[0 ; 4]$.

Résolution

1) $f'(x) = 2x - 4$ s'annule pour $x = 2$. $f'(x) < 0$ sur $[0 ; 2[$ et $f'(x) > 0$ sur $]2 ; 4]$. Donc f est décroissante sur $[0 ; 2]$ puis croissante sur $[2 ; 4]$.

$f(0) = 3$; $f(2) = 4 - 8 + 3 = -1$ (minimum) ; $f(4) = 16 - 16 + 3 = 3$.

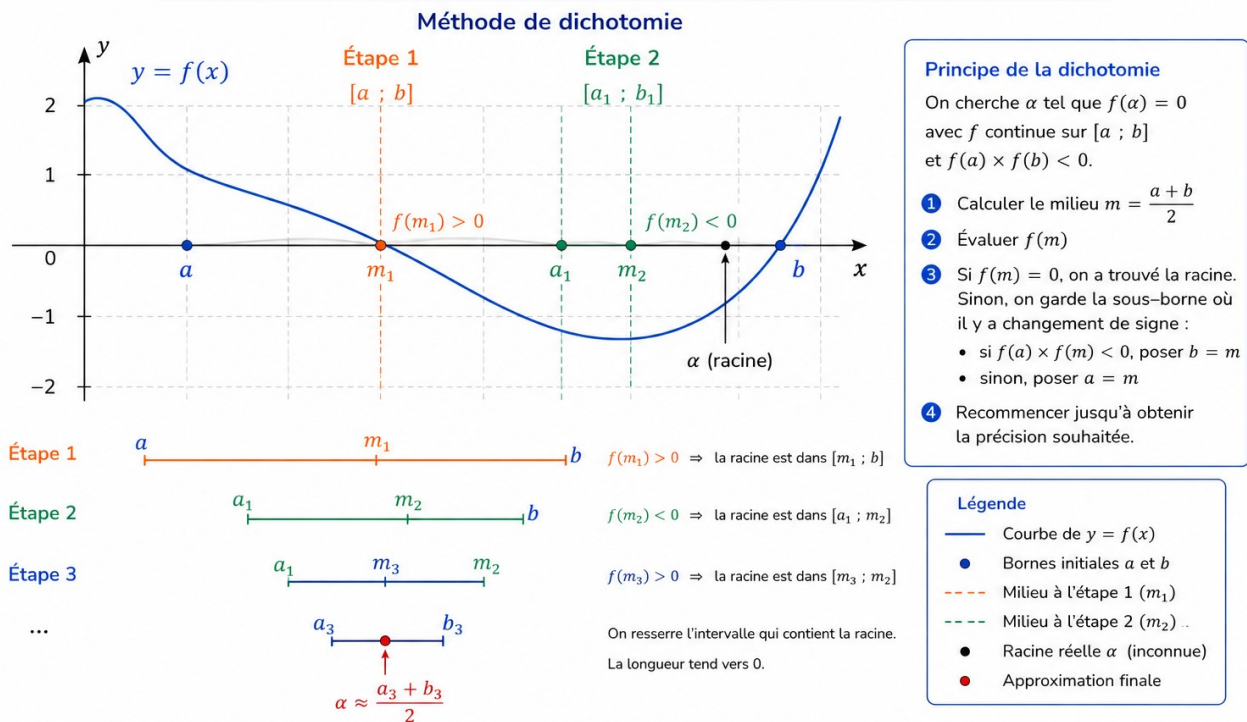
Tableau : f décroît de 3 à -1 sur $[0 ; 2]$, puis croît de -1 à 3 sur $[2 ; 4]$.

2) $f(x) = 0$: sur $[0 ; 2]$, f passe de 3 à -1 en décroissant, donc s'annule exactement une fois ; sur $[2 ; 4]$, f passe de -1 à 3 en croissant, donc s'annule exactement une fois également. Au total, $f(x) = 0$ admet exactement 2 solutions sur $[0 ; 4]$ (ce que l'on peut vérifier : $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$, racines $x = 1$ et $x = 3$, toutes deux dans $[0 ; 4]$).

Applications métiers (Travaux Publics) : *Modélisation de phénomènes continus issus des disciplines professionnelles : profils en long et en travers, courbes d'assemblage de chaussée, lois d'évolution de résistance ou de déformation d'un matériau, dimensionnement d'ouvrages.*

1B4 — Recherche d'une valeur approchée d'une racine (balayage, dichotomie, méthode de Newton)

1B4 — Recherche d'une valeur approchée d'une racine (balayage, dichotomie, méthode de Newton)



Lorsqu'une équation $f(x) = 0$ ne se résout pas explicitement, on recourt à des méthodes numériques itératives pour en approcher une solution avec la précision souhaitée.

Méthode de balayage

On évalue f en des points régulièrement espacés d'un pas donné sur l'intervalle d'étude ; un changement de signe de f entre deux points consécutifs indique la présence d'une racine entre ces deux points (théorème des valeurs intermédiaires, pour f continue). En réduisant le pas, on affine la précision.

Méthode de dichotomie

Si f est continue sur $[a ; b]$ et $f(a) \times f(b) < 0$, on sait qu'il existe une racine dans $]a ; b[$. On calcule le milieu $m = (a+b)/2$: si $f(a) \times f(m) < 0$, la racine est dans $]a ; m[$, sinon elle est dans $]m ; b[$. On répète le procédé sur le nouvel intervalle, deux fois plus petit à chaque étape, jusqu'à obtenir la précision voulue.

Méthode de Newton

Partant d'une valeur initiale x_0 proche de la racine cherchée, on construit la suite définie par $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$, qui converge en général très rapidement vers une racine de f (interprétation graphique : x_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de la tangente à la courbe de f en x_n avec l'axe des abscisses).

Mise en œuvre

Ces trois méthodes se programment naturellement par une boucle (algorithmique), sur calculatrice ou dans un langage comme Python, et permettent d'obtenir une valeur approchée avec une précision de 10^{-p} donnée.

Exemple résolu

Énoncé

On cherche une valeur approchée de la solution de $x^3 - x - 2 = 0$ sur $[1 ; 2]$ par dichotomie, à 0,25 près.

On donne $f(x) = x^3 - x - 2$, $f(1) = -2$, $f(2) = 4$.

Résolution

$f(1) = -2 < 0$ et $f(2) = 4 > 0$: la racine est dans $]1 ; 2[$.

Étape 1 : $m = 1,5$. $f(1,5) = 3,375 - 1,5 - 2 = -0,125 < 0$. La racine est donc dans $]1,5 ; 2[$.

Étape 2 : $m = 1,75$. $f(1,75) = 5,359 - 1,75 - 2 = 1,609 > 0$. La racine est donc dans $]1,5 ; 1,75[$.

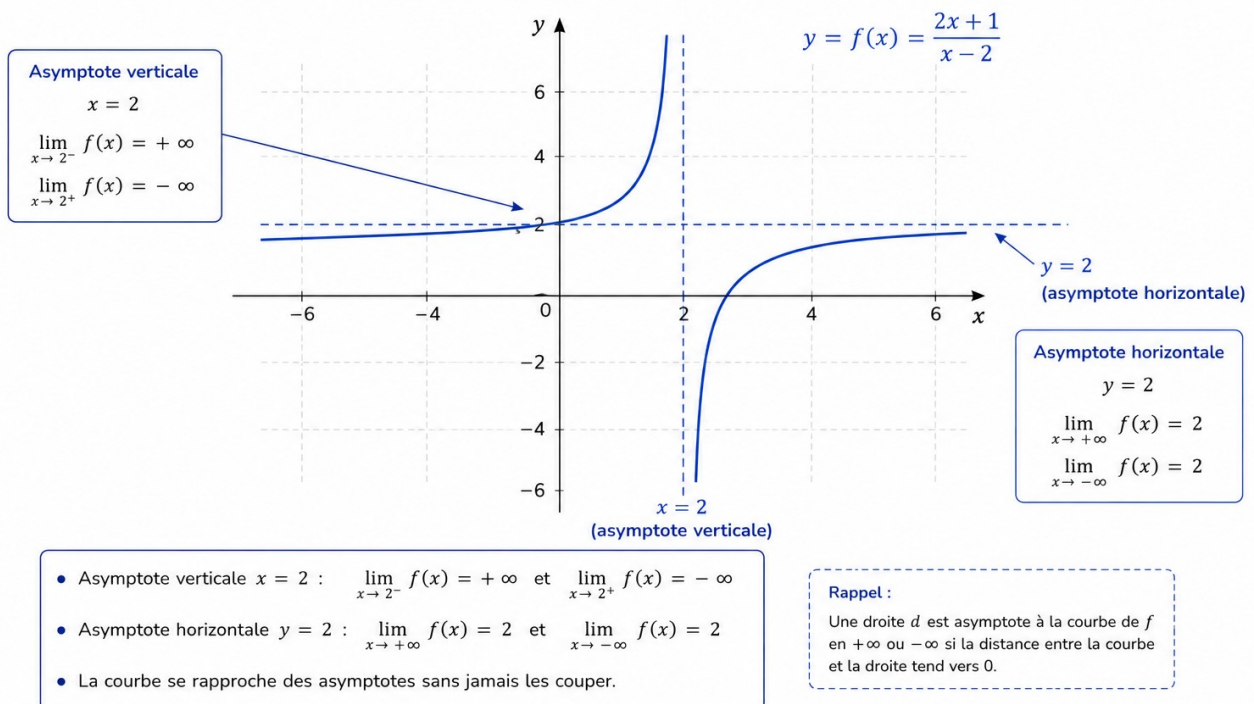
L'intervalle $[1,5 ; 1,75]$ a une amplitude de 0,25 : on peut donner comme valeur approchée $x \approx 1,625$ (milieu de l'intervalle), avec une précision de 0,125 sur cette estimation, la racine exacte étant comprise entre 1,5 et 1,75.

Applications métiers (Travaux Publics) : *Modélisation de phénomènes continus issus des disciplines professionnelles : profils en long et en travers, courbes d'assemblage de chaussée, lois d'évolution de résistance ou de déformation d'un matériau, dimensionnement d'ouvrages.*

1B5 — Limites de fonctions ; asymptotes

1B5 — Limites de fonctions ; asymptotes

Exemple : soit $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.



L'étude des limites permet de décrire le comportement d'une fonction au voisinage d'un point où elle n'est pas définie, ou lorsque la variable tend vers l'infini ; elle se traduit graphiquement par la présence d'asymptotes.

Limite finie en $+\infty$ ou $-\infty$: asymptote horizontale

Si $f(x)$ tend vers un réel ℓ quand x tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$), la droite d'équation $y = \ell$ est asymptote horizontale à la courbe de f .

Limite infinie en un point : asymptote verticale

Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ quand x tend vers a (a réel), la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe de f .

Limite infinie à l'infini ; asymptote oblique

Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$), on parle de branche infinie ; si, de plus, $f(x) - (ax + b)$ tend vers 0, la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe de f .

Limites et opérations

On détermine la limite d'une fonction obtenue par somme, produit ou passage à l'inverse de fonctions de référence, ainsi que pour les formes u^n , $\ln(u)$, e^u , en combinant les limites des fonctions de référence usuelles.

Lecture graphique

Sur une courbe donnée par un logiciel ou une calculatrice, on interprète directement le comportement asymptotique en observant vers quelle valeur ou quel infini se rapproche la courbe.

Exemple résolu

Énoncé

Soit $f(x) = (2x+1)/(x-3)$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

- 1) Déterminer la limite de f en 3^+ et en 3^- . Qu'en déduit-on ?
- 2) Déterminer la limite de f en $+\infty$. Qu'en déduit-on ?

Résolution

1) Quand $x \rightarrow 3^+$, le numérateur $2x+1 \rightarrow 7$ (positif), le dénominateur $x-3 \rightarrow 0^+$ (valeurs positives proches de 0). Donc $f(x) \rightarrow +\infty$.

Quand $x \rightarrow 3^-$, le dénominateur $x-3 \rightarrow 0^-$. Donc $f(x) \rightarrow -\infty$.

La droite d'équation $x = 3$ est asymptote verticale à la courbe de f .

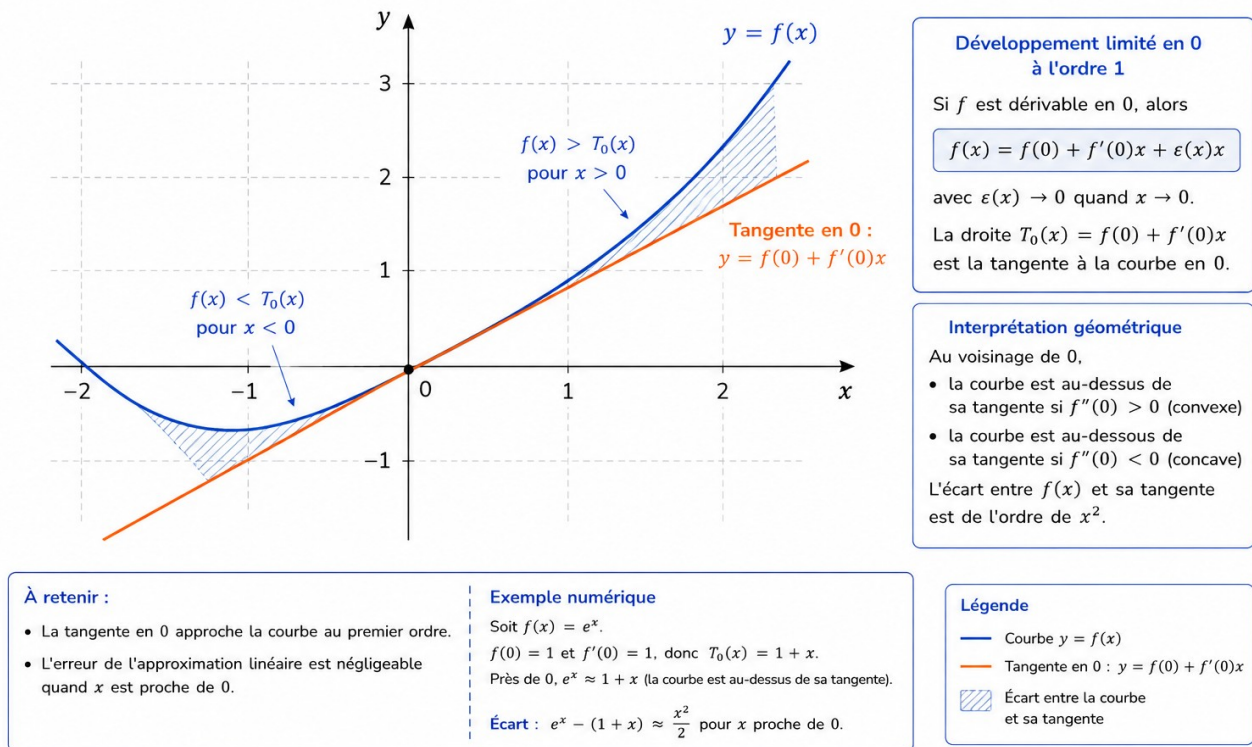
2) $f(x) = (2x+1)/(x-3) = 2 + 7/(x-3)$ (en écrivant la division). Quand $x \rightarrow +\infty$, $7/(x-3) \rightarrow 0$, donc $f(x) \rightarrow 2$.

La droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$.

Applications métiers (Travaux Publics) : *Modélisation de phénomènes continus issus des disciplines professionnelles : profils en long et en travers, courbes d'assemblage de chaussée, lois d'évolution de résistance ou de déformation d'un matériau, dimensionnement d'ouvrages.*

1B6 — Développement limité en 0 d'une fonction ; tangente

1B6 — Développement limité en 0 d'une fonction ; tangente



Le développement limité fournit une approximation polynomiale d'une fonction au voisinage d'un point, particulièrement utile pour simplifier des calculs ou étudier finement la position d'une courbe par rapport à sa tangente.

Principe

Au voisinage de 0, une fonction f suffisamment régulière peut être approchée par un polynôme : $f(x) \approx a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, l'erreur commise devenant négligeable devant x^n lorsque x est proche de 0. On dit que l'on a obtenu un développement limité de f en 0 à l'ordre n .

Développement limité à l'ordre 1 et tangente

Le développement limité à l'ordre 1 en 0, $f(x) \approx f(0) + f'(0)x$, correspond exactement à l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 : $y = f'(0)x + f(0)$.

Développement limité à l'ordre 2 et position par rapport à la tangente

Le terme du 2nd degré du développement limité, a_2x^2 , renseigne sur la position de la courbe par rapport à sa tangente au voisinage de 0 : si $a_2 > 0$, la courbe est au-dessus de la tangente ; si $a_2 < 0$, elle est en dessous.

Exemples usuels (admis)

Au voisinage de 0 : $e^x \approx 1 + x + x^2/2$; $\ln(1+x) \approx x - x^2/2$; $1/(1-x) \approx 1 + x + x^2$; ces développements sont obtenus à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

Exemple résolu

Énoncé

On donne le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $f(x) = e^x$: $e^x \approx 1 + x + x^2/2$.

- 1) En déduire l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.
- 2) Préciser la position de la courbe par rapport à cette tangente au voisinage de 0.
- 3) Utiliser ce développement pour donner une valeur approchée de $e^{0,1}$.

Résolution

- 1) Le développement à l'ordre 1 est $e^x \approx 1 + x$; la tangente en 0 a donc pour équation $y = x + 1$.
- 2) Le terme du 2nd degré est $+x^2/2$, de coefficient positif : la courbe de f est donc au-dessus de sa tangente

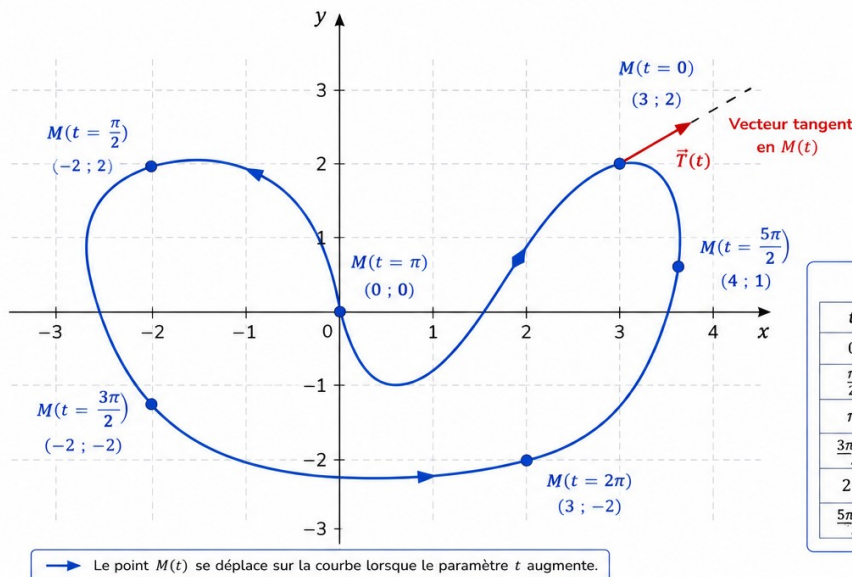
au voisinage de 0.

3) $e^{0,1} \approx 1 + 0,1 + \frac{0,1^2}{2} = 1 + 0,1 + 0,005 = 1,105$ (valeur exacte : $e^{0,1} \approx 1,10517$, l'approximation est cohérente à 2×10^{-4} près).

Applications métiers (Travaux Publics) : *Modélisation de phénomènes continus issus des disciplines professionnelles : profils en long et en travers, courbes d'assemblage de chaussée, lois d'évolution de résistance ou de déformation d'un matériau, dimensionnement d'ouvrages.*

1B7 — Courbes paramétrées (exemples polynomiaux)

1B7 — Courbes paramétrées (exemples polynomiaux)



Exemple de courbe paramétrée

Courbe définie pour $t \in \mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} x(t) = t - \frac{1}{2}t^3 \\ y(t) = 2t - \frac{1}{2}t^3 \end{cases}$$

Il s'agit d'une courbe polynomiale de degré 3 (forme en S avec boucle).

Points remarquables

t	$M(t) = (x(t); y(t))$	Position
0	(3 ; 2)	Départ
$\frac{\pi}{2}$	(-2 ; 2)	Haut de la boucle
π	(0 ; 0)	Croisement de l'origine
$\frac{3\pi}{2}$	(-2 ; -2)	Bas de la boucle
2π	(3 ; -2)	Fin d'un tour
$\frac{5\pi}{2}$	(4 ; 1)	Remontée à droite

Vecteur tangent

Le vecteur tangent en $M(t)$ est donné par :

$$\vec{T}(t) = (x'(t); y'(t)) = \left(1 - \frac{3}{2}t^2; 2 - \frac{3}{2}t^2\right)$$

Il est tangent à la courbe en $M(t)$ et indique la direction du déplacement.

À retenir

- Une courbe paramétrée est donnée par $x(t)$ et $y(t)$.
- Le point $M(t) = (x(t), y(t))$ décrit la courbe lorsque t varie.
- Le vecteur tangent $\vec{T}(t) = (x'(t), y'(t))$ donne la direction de la trajectoire.
- Le sens de parcours est indiqué par les flèches (t croissant).

Une courbe paramétrée décrit une trajectoire dans le plan à l'aide d'un paramètre (souvent le temps), les coordonnées x et y étant chacune fonction de ce paramètre ; ce modèle est adapté à la description de trajectoires (godet d'engin, profil de came, tracé de design).

Définition

Une courbe paramétrée est donnée par deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$ d'un même paramètre t , décrivant les coordonnées d'un point $M(t) = (x(t); y(t))$ qui se déplace lorsque t varie. Ici, on se limite à des exemples où $x(t)$ et $y(t)$ sont des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

Vecteur dérivé et tangente

Au point de paramètre t , le vecteur dérivé a pour coordonnées $(x'(t); y'(t))$. Lorsque ce vecteur n'est pas nul, il dirige la tangente à la courbe au point $M(t)$: c'est un vecteur directeur de la tangente.

Variations conjointes

Pour tracer la courbe, on étudie les variations de $x(t)$ et de $y(t)$ séparément, puis on les rassemble dans un même tableau (« tableau de variations conjointes ») afin de déterminer, pour chaque valeur de t , le sens de déplacement du point $M(t)$ (vers la droite/gauche, vers le haut/bas).

Exemple résolu

Énoncé

Un point $M(t)$ décrit la courbe paramétrée par $x(t) = t^2$ et $y(t) = t^3 - 3t$, pour $t \in [-2; 2]$.

- 1) Calculer les coordonnées du vecteur dérivé au point de paramètre $t = 1$.
- 2) En déduire un vecteur directeur de la tangente en ce point, et les coordonnées de $M(1)$.

Résolution

1) $x'(t) = 2t$ donc $x'(1) = 2$. $y'(t) = 3t^2 - 3$ donc $y'(1) = 3 - 3 = 0$.

Le vecteur dérivé au point de paramètre $t = 1$ a pour coordonnées $(2; 0)$.

2) Ce vecteur est non nul : $(2; 0)$, ou plus simplement $(1; 0)$, dirige la tangente en ce point (tangente horizontale).

$M(1)$ a pour coordonnées $x(1) = 1^2 = 1$ et $y(1) = 1^3 - 3 \times 1 = 1 - 3 = -2$, soit $M(1) = (1; -2)$.

Applications métiers (Travaux Publics) : *Modélisation de phénomènes continus issus des disciplines professionnelles : profils en long et en travers, courbes d'assemblage de chaussée, lois d'évolution de résistance ou de déformation d'un matériau, dimensionnement d'ouvrages.*

Exercices d'application

Ex. B1 — Profil d'un talus

Énoncé

Le profil d'un talus est modélisé, sur $[0 ; 6]$ (x en mètres), par la fonction $f(x) = -x^2 + 6x$, où $f(x)$ représente l'altitude en mètres par rapport au pied du talus.

- 1) Calculer $f'(x)$.
- 2) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0 ; 6]$ et dresser le tableau de variation de f .
- 3) En déduire l'altitude maximale du talus et l'abscisse à laquelle elle est atteinte.

Corrigé

- 1) $f'(x) = -2x + 6$.
- 2) $f'(x) = 0$ pour $x = 3$. $f'(x) > 0$ sur $[0 ; 3[$ (donc f croissante) et $f'(x) < 0$ sur $]3 ; 6]$ (donc f décroissante).
 $f(0) = 0$; $f(3) = -9 + 18 = 9$; $f(6) = -36 + 36 = 0$.
 f croît de 0 à 9 sur $[0 ; 3]$, puis décroît de 9 à 0 sur $[3 ; 6]$.
- 3) L'altitude maximale du talus est de 9 m, atteinte en $x = 3$ m.

Ex. B2 — Coût de fonctionnement d'une centrale à béton

Énoncé

Le coût journalier de fonctionnement d'une centrale à béton, pour une production de x tonnes ($x > 0$), est modélisé par $C(x) = 0,01x^2 + 2x + 800$ (en euros).

Le coût moyen par tonne est $CM(x) = C(x)/x$.

- 1) Montrer que $CM(x) = 0,01x + 2 + 800/x$.
- 2) Calculer la dérivée de CM et étudier son signe sur $]0 ; +\infty[$ (on admettra que $CM'(x) = 0,01 - 800/x^2$ s'annule pour $x = \sqrt{80000} \approx 283$).
- 3) En déduire, pour $x \in]0 ; +\infty[$, la production qui minimise le coût moyen par tonne.

Corrigé

- 1) $CM(x) = C(x)/x = (0,01x^2 + 2x + 800)/x = 0,01x + 2 + 800/x$. ✓
- 2) $CM'(x) = 0,01 - 800/x^2$. Pour $x < 283$, $800/x^2 > 0,01$ donc $CM'(x) < 0$ (CM décroissante) ; pour $x > 283$, $CM'(x) > 0$ (CM croissante). CM' s'annule et change de signe ($-$ puis $+$) en $x \approx 283$: CM admet un minimum en ce point.
- 3) Le coût moyen par tonne est minimal pour une production d'environ 283 tonnes par jour.

Évaluation de fin de module (QCM)

Question 1. Quelle est la dérivée de $f(x) = x^3$?

- A. $3x$
- B. x^2
- C. $3x^2$ ✓ (réponse correcte)
- D. $3x^4$

Explication : $(x^n)' = n x^{n-1}$, donc pour $n = 3$: $f'(x) = 3x^2$.

Question 2. Si $f'(x) \geq 0$ sur un intervalle I , que peut-on en conclure sur f ?

- A. f est décroissante sur I
- B. f est croissante sur I ✓ (réponse correcte)
- C. f est constante sur I
- D. On ne peut rien conclure

Explication : Une dérivée positive ou nulle sur un intervalle traduit une fonction croissante sur cet intervalle.

Question 3. Dans la méthode de dichotomie pour approcher une racine de f sur $[a ; b]$ avec $f(a) \times f(b) < 0$, que fait-on à chaque étape ?

- A. On calcule $f'(a)$ et $f'(b)$
- B. On évalue f au milieu de l'intervalle et on réduit l'intervalle de moitié ✓ (réponse correcte)
- C. On multiplie l'intervalle par 2
- D. On résout $f(x) = 0$ directement

Explication : On évalue f au milieu m de l'intervalle ; selon le signe de $f(a) \times f(m)$, on conserve $[a ; m]$ ou $[m ; b]$, ce qui réduit l'intervalle de moitié à chaque étape.

Question 4. Si $f(x)$ tend vers 2 quand x tend vers $+\infty$, quelle est l'asymptote correspondante à la courbe de f ?

- A. Asymptote verticale d'équation $x = 2$
- B. Asymptote horizontale d'équation $y = 2$ ✓ (réponse correcte)
- C. Asymptote oblique d'équation $y = 2x$
- D. Il n'y a pas d'asymptote

Explication : Une limite finie en $+\infty$ (ou $-\infty$) correspond toujours à une asymptote horizontale, d'équation $y =$ cette limite.

Question 5. Le développement limité en 0 à l'ordre 1 d'une fonction f correspond exactement à :

- A. La dérivée seconde de f en 0
- B. L'équation de la tangente à la courbe de f en $x = 0$ ✓ (réponse correcte)
- C. Une primitive de f
- D. La limite de f en $+\infty$

Explication : Le DL à l'ordre 1 en 0, $f(x) \approx f(0) + f'(0)x$, est précisément l'équation de la tangente en $x = 0$: $y = f'(0)x + f(0)$.

Module C — Calcul intégral

1ère année

Notions du module

Code	Notion	Durée (h)
1C1	Primitives de fonctions de référence	1
1C2	Calcul intégral : définition, propriétés	1
1C3	Calcul d'aires ; méthodes d'approximation d'une intégrale	2
1C4	Valeur moyenne d'une fonction ; intégration par parties	1

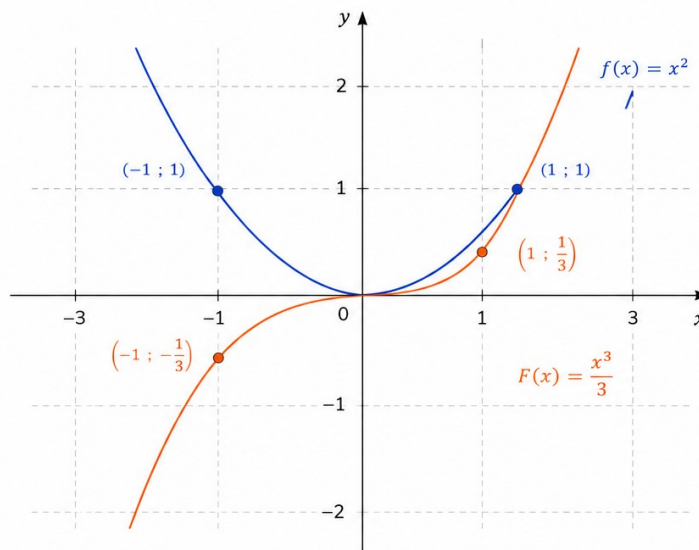
1C1 — Primitives de fonctions de référence

1C1 — Primitives de fonctions de référence

Sur un intervalle I , si F est une primitive de f , alors $F' = f$.

Fonction f (en bleu) Exemples de fonctions de référence
$f_1(x) = 1$
$f_2(x) = x$
$f_3(x) = x^2$
$f_4(x) = e^x$
$f_5(x) = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$
$f_6(x) = \cos x$
$f_7(x) = \sin x$

Primitive F (en orange) Exemples de primitives correspondantes
$F_1(x) = x + C$
$F_2(x) = \frac{x^2}{2} + C$
$F_3(x) = \frac{x^3}{3} + C$
$F_4(x) = e^x + C$
$F_5(x) = \ln x + C \quad (x > 0)$
$F_6(x) = \sin x + C$
$F_7(x) = -\cos x + C$



Relation dérivation / primitive

Dérivation

Si F est une primitive de f sur I , alors :

$$F'(x) = f(x)$$

(la dérivée de F redonne f)

primitive

Si f est continue sur I , alors f admet des primitives sur I . Toutes les primitives de f s'écrivent :

$$F(x) + C$$

où C est une constante réelle.

Tableau récapitulatif (sur les intervalles indiqués)

$f(x)$	1	x	x^2	e^x	$\frac{1}{x}$	$\cos x$	$\sin x$
Une primitive $F(x)$	$x + C$	$\frac{x^2}{2} + C$	$\frac{x^3}{3} + C$	$e^x + C$	$\ln x + C$	$\sin x + C$	$-\cos x + C$
Domaine	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

Une primitive d'une fonction f est une fonction F dont la dérivée est f ; le calcul de primitives est l'opération réciproque de la dérivation et constitue le point de départ du calcul intégral.

Définition

F est une primitive de f sur un intervalle I si F est dérivable sur I et si, pour tout x de I , $F'(x) = f(x)$. Si F est une primitive de f , alors toutes les primitives de f sur I sont de la forme $F(x) + k$, où k est une constante réelle quelconque.

Primitives usuelles

x^n admet pour primitive $x^{n+1}/(n+1)$ ($n \neq -1$); $1/x$ admet pour primitive $\ln(x)$ sur $]0; +\infty[$; e^x admet pour primitive e^x ; $\cos(x)$ admet pour primitive $\sin(x)$; $\sin(x)$ admet pour primitive $-\cos(x)$.

Primitives de formes composées

u^n admet pour primitive $u^{n+1}/(n+1)$ (n entier relatif $\neq -1$); u'/u admet pour primitive $\ln(u)$ lorsque u est strictement positive; $u' e^u$ admet pour primitive e^u .

Méthode

On calcule une primitive à la main dans les cas simples, en reconnaissant l'une des formes ci-dessus (éventuellement après avoir réécrit l'expression), et à l'aide d'un logiciel de calcul formel dans tous les autres cas.

Exemple résolu

Énoncé

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions suivantes :

1) $f(x) = 6x^2 - 4x + 3$

2) $g(x) = 2x \times e^{(x^2)}$

Résolution

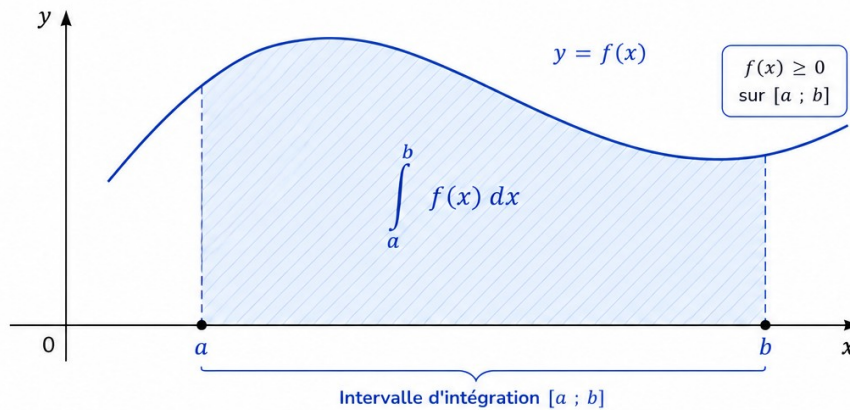
1) Une primitive de $6x^2$ est $6 \times x^3/3 = 2x^3$; une primitive de $-4x$ est $-4 \times x^2/2 = -2x^2$; une primitive de 3 est $3x$. Donc $F(x) = 2x^3 - 2x^2 + 3x$ (à une constante additive près) est une primitive de f .

2) $g(x) = 2x \times e^{(x^2)}$ est de la forme $u'(x) e^{u(x)}$ avec $u(x) = x^2$ et $u'(x) = 2x$. Une primitive de g est donc $G(x) = e^{(x^2)}$ (à une constante additive près).

Applications métiers (Travaux Publics) : *Calcul d'aires et de volumes de terrassement, de sections d'ouvrages, valeur moyenne et valeur efficace de grandeurs physiques (transfert énergétique), calcul de centre d'inertie.*

1C2 — Calcul intégral : définition, propriétés

1C2 — Calcul intégral : définition, propriétés



Interprétation géométrique

$\int_a^b f(x) dx$ représente l'aire (en unités d'aire) du domaine situé sous la courbe $y = f(x)$, au-dessus de l'axe des abscisses, entre $x = a$ et $x = b$.

Définition (intégrale définie)

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ avec $a < b$.
L'intégrale définie de f entre a et b est le nombre réel, noté

$$\int_a^b f(x) dx$$

qui correspond à l'aire algébrique sous la courbe $y = f(x)$ entre a et b .

Propriétés (pour f et g continues sur $[a; b]$, $k \in \mathbb{R}$)

• Linéarité :

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$
$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

• Positivité : si $f(x) \geq 0$ sur $[a; b]$, alors

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

• Ordre : si $f(x) \leq g(x)$ sur $[a; b]$, alors

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

• Additivité des intervalles :

pour $a \leq c \leq b$,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Remarque : si f change de signe sur $[a; b]$, l'intégrale représente l'aire algébrique (aires au-dessus – aires au-dessous de l'axe des abscisses).

L'intégrale d'une fonction sur un intervalle $[a; b]$ est définie à partir d'une primitive et permet, entre autres, de calculer une aire, une valeur moyenne ou un travail.

Définition

Si F est une primitive de f sur $[a; b]$, l'intégrale de f entre a et b est définie par : $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$. On calcule une intégrale à la main dans les cas simples et à l'aide d'un logiciel de calcul formel dans tous les autres cas.

Relation de Chasles

Pour tout réel c : $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

Linéarité

$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$, et $\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$ pour toute constante réelle k .

Positivité

Si $f(x) \geq 0$ pour tout x de $[a; b]$ (avec $a \leq b$), alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$. Plus généralement, si $f(x) \leq g(x)$ sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

Exemple résolu

Énoncé

Calculer l'intégrale $I = \int_0^2 (3x^2 - 2x) dx$.

Résolution

Une primitive de $f(x) = 3x^2 - 2x$ est $F(x) = x^3 - x^2$.

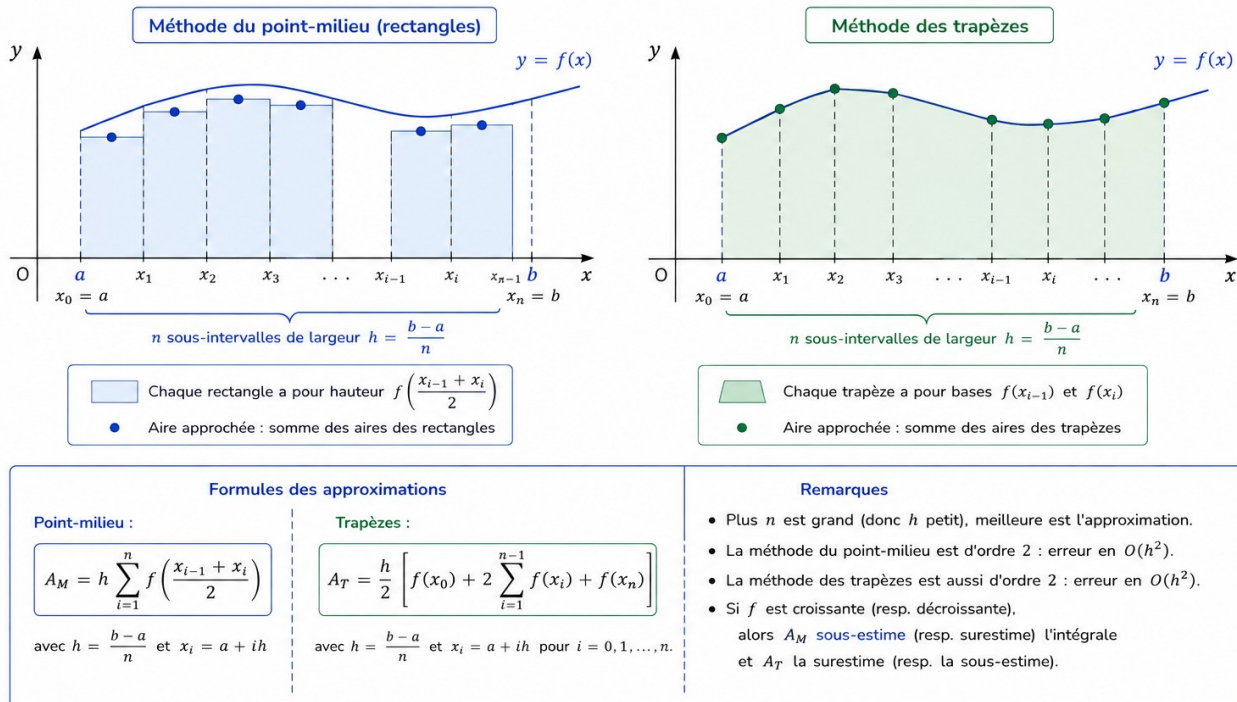
$$I = F(2) - F(0) = (2^3 - 2^2) - (0^3 - 0^2) = (8 - 4) - 0 = 4.$$

Applications métiers (Travaux Publics) : Calcul d'aires et de volumes de terrassement, de sections d'ouvrages, valeur moyenne et valeur efficace de grandeurs physiques (transfert énergétique), calcul de centre d'inertie.

1C3 — Calcul d'aires ; méthodes d'approximation d'une intégrale

1C3 — Calcul d'aires ; méthodes d'approximation d'une intégrale

On cherche à approximer l'aire sous la courbe $y = f(x)$ sur $[a ; b]$, c'est-à-dire l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$.



L'intégrale permet de calculer l'aire d'un domaine plan délimité par deux courbes ; lorsqu'une primitive n'est pas accessible, on utilise des méthodes numériques d'approximation, naturellement programmables.

Aire sous une courbe

Si f est positive sur $[a ; b]$, l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, vaut $\int_a^b f(x) dx$.

Aire entre deux courbes

Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout x de $[a ; b]$, l'aire du domaine $\{M(x,y), a \leq x \leq b \text{ et } f(x) \leq y \leq g(x)\}$ vaut $\int_a^b [g(x) - f(x)] dx$.

Méthode des rectangles (point-milieu)

On découpe $[a ; b]$ en n sous-intervalles de même largeur $h = (b-a)/n$, et on approche l'intégrale par la somme des aires de rectangles de largeur h et de hauteur f évaluée au milieu de chaque sous-intervalle.

Méthode des trapèzes

On approche l'intégrale par la somme des aires de trapèzes construits sur chaque sous-intervalle, les hauteurs étant les valeurs de f aux deux bornes du sous-intervalle.

Méthode de Monte-Carlo

On tire aléatoirement un grand nombre de points dans un rectangle englobant le domaine étudié, et on approche l'aire du domaine par la proportion de points tombés à l'intérieur du domaine, multipliée par l'aire du rectangle englobant.

Exemple résolu

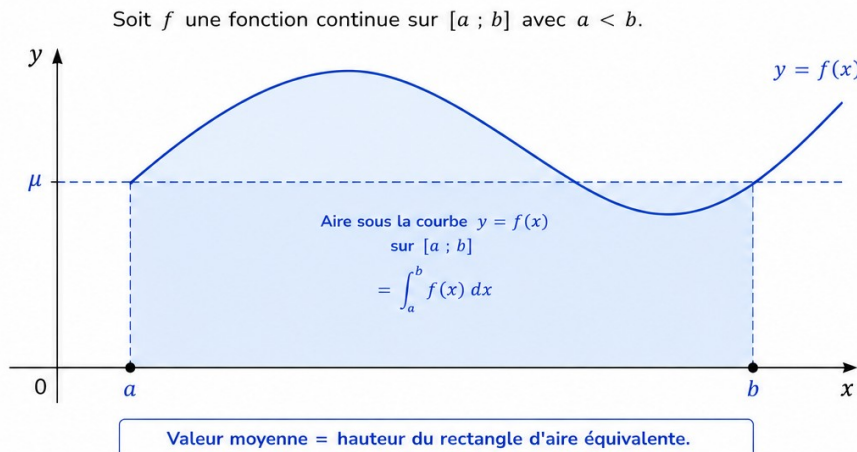
Énoncé Approcher $I = \int_0^2 x^2 dx$ par la méthode des trapèzes avec 2 sous-intervalles ($n = 2$), puis comparer avec la valeur exacte.
Résolution Pas $h = (2-0)/2 = 1$. Points : $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$. $f(x_0) = 0, f(x_1) = 1, f(x_2) = 4$. Approximation trapèzes : $I \approx h \times [f(x_0)/2 + f(x_1) + f(x_2)/2] = 1 \times [0/2 + 1 + 4/2] = 1 \times [0 + 1 + 2] = 3$. Valeur exacte : une primitive de x^2 est $x^3/3$, donc $I = 2^3/3 - 0^3/3 = 8/3 \approx 2,67$.

L'approximation par la méthode des trapèzes (3) surestime légèrement la valeur exacte ($\approx 2,67$), ce qui est cohérent avec la convexité de x^2 sur $[0 ; 2]$. En augmentant le nombre de sous-intervalles n , l'approximation se rapproche de la valeur exacte.

Applications métiers (Travaux Publics) : Calcul d'aires et de volumes de terrassement, de sections d'ouvrages, valeur moyenne et valeur efficace de grandeurs physiques (transfert énergétique), calcul de centre d'inertie.

1C4 — Valeur moyenne d'une fonction ; intégration par parties

1C4 — Valeur moyenne d'une fonction ; intégration par parties



Valeur moyenne de f sur $[a ; b]$

La valeur moyenne μ de f sur $[a ; b]$ est :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Interprétation géométrique :

μ est la hauteur du rectangle de base $b-a$ dont l'aire est égale à l'aire sous la courbe.

Aire du rectangle

Base = $b-a$; Hauteur = μ

Aire du rectangle = $\mu(b-a)$

Par définition de μ :

$$\mu(b-a) = \int_a^b f(x) dx$$

Intégration par parties

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur $[a ; b]$, alors

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx$$

Formule équivalente :

$$\int_a^b u'(x) v(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) v'(x) dx$$

Interprétation (intégration par parties)

On "dérive" u et on "intègre" v (ou inversement), au prix d'un terme de bord $[uv]_a^b$.



Exemples d'utilisation

- $\int x e^x dx$ (choisir $u = x$, $v' = e^x$)
- $\int x \cos x dx$ (choisir $u = x$, $v' = \cos x$)
- Calcul d'aires, d'espérances, de moments...

Remarque : La valeur moyenne μ vérifie $\min_{[a,b]} f(x) \leq \mu \leq \max_{[a,b]} f(x)$ (théorème des valeurs intermédiaires).

La valeur moyenne d'une fonction généralise la moyenne arithmétique au cas continu ; l'intégration par parties est une technique de calcul permettant de traiter des intégrales de produits de fonctions.

Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle

La valeur moyenne de f sur $[a ; b]$ ($a < b$) est $\mu = (1/(b-a)) \times \int_a^b f(x) dx$. Interprétation géométrique : c'est la hauteur du rectangle de base $[a ; b]$ dont l'aire est égale à celle du domaine délimité par la courbe de f sur $[a ; b]$ (lorsque $f \geq 0$).

Contexte professionnel

Cette notion est directement liée aux notions de valeur moyenne et de valeur efficace dans un transfert énergétique, ainsi qu'au calcul de centre d'inertie et de moment d'inertie (vus en mécanique).

Formule d'intégration par parties

Pour u et v deux fonctions dérivables sur $[a ; b]$, à dérivées continues :

$$\int_a^b u'(x) v(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) v'(x) dx.$$

Cette formule permet de transformer une intégrale difficile à calculer directement en une autre, plus simple, en choisissant judicieusement quelle partie du produit dériver et quelle partie intégrer.

Exemple résolu

Énoncé

1) Calculer, par intégration par parties, $I = \int_0^1 x e^x dx$.

2) En déduire la valeur moyenne de $f(x) = x e^x$ sur $[0 ; 1]$.

Résolution

1) On pose $u(x) = x$ (donc $u'(x) = 1$) et $v'(x) = e^x$ (donc $v(x) = e^x$).

$$I = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 1 \times e^x dx = (1 \times e^1 - 0 \times e^0) - [e^x]_0^1 = e - (e^1 - e^0) = e - (e - 1) = 1.$$

2) Valeur moyenne $\mu = (1/(1-0)) \times I = 1/1 \times 1 = 1$.

Applications métiers (Travaux Publics) : Calcul d'aires et de volumes de terrassement, de sections d'ouvrages, valeur moyenne et valeur efficace de grandeurs physiques (transfert énergétique), calcul de centre d'inertie.

Exercices d'application

Ex. C1 — Section d'un fossé de drainage

Énoncé

La section transversale d'un fossé de drainage est délimitée, dans un repère où x et y sont en mètres, par la courbe d'équation $y = x^2/4$ (talus) et la droite d'équation $y = 1$ (niveau du terrain naturel), pour $x \in [-2 ; 2]$.

- 1) Déterminer les abscisses des points d'intersection des deux courbes.
- 2) Calculer l'aire de la section du fossé, c'est-à-dire l'aire du domaine compris entre les deux courbes.

Corrigé

1) $x^2/4 = 1 \implies x^2 = 4 \implies x = -2$ ou $x = 2$.

2) Sur $[-2 ; 2]$, la droite $y = 1$ est au-dessus de la parabole $y = x^2/4$ (par exemple en $x = 0$: $1 > 0$). L'aire cherchée est :

$$A = \int_{-2}^2 [1 - x^2/4] dx.$$

Une primitive de $1 - x^2/4$ est $x - x^3/12$.

$$A = [x - x^3/12]_{-2}^2 = (2 - 8/12) - (-2 - (-8)/12) = (2 - 2/3) - (-2 + 2/3) = (4/3) - (-4/3) = 8/3 \approx 2,67 \text{ m}^2.$$

Ex. C2 — Débit moyen d'une pompe de chantier

Énoncé

Le débit d'une pompe de relevage, en m^3/h , varie au cours d'un cycle de pompage de durée 4 h selon la loi $q(t) = -t^2 + 4t$ (t en heures, $t \in [0 ; 4]$).

- 1) Calculer le volume total pompé sur le cycle, égal à $\int_0^4 q(t) dt$.
- 2) En déduire le débit moyen de la pompe sur ce cycle.

Corrigé

1) Une primitive de $q(t) = -t^2 + 4t$ est $Q(t) = -t^3/3 + 2t^2$.

$$\int_0^4 q(t) dt = Q(4) - Q(0) = (-64/3 + 32) - 0 = -64/3 + 96/3 = 32/3 \approx 10,67 \text{ m}^3.$$

2) Débit moyen = $(1/(4-0)) \times \int_0^4 q(t) dt = (1/4) \times 32/3 = 32/12 = 8/3 \approx 2,67 \text{ m}^3/\text{h}$.

Évaluation de fin de module (QCM)

Question 1. Une primitive de la fonction $f(x) = x^2$ est :

A. $F(x) = 2x$

B. $F(x) = x^3$

C. $F(x) = x^3/3$ ✓ (réponse correcte)

D. $F(x) = x^2/2$

Explication : Une primitive de x^n est $x^{n+1}/(n+1)$; pour $n = 2$: $x^3/3$.

Question 2. Que vaut $\int_a^b f(x) dx$ lorsque F est une primitive de f sur $[a ; b]$?

A. $F(a) - F(b)$

B. $F(b) - F(a)$ ✓ (réponse correcte)

C. $F(a) + F(b)$

D. $F'(b) - F'(a)$

Explication : Par définition, l'intégrale de f entre a et b vaut $F(b) - F(a)$.

Question 3. Quelle méthode d'approximation d'une intégrale consiste à tirer aléatoirement des points dans un rectangle englobant le domaine étudié ?

A. La méthode des trapèzes

B. La méthode du point-milieu

C. La méthode de Monte-Carlo ✓ (réponse correcte)

D. La méthode d'Euler

Explication : La méthode de Monte-Carlo repose sur un tirage aléatoire de points et l'estimation de l'aire par la proportion de points tombés dans le domaine.

Question 4. La valeur moyenne d'une fonction f sur $[a ; b]$ ($a < b$) est donnée par :

A. $\int_a^b f(x) dx$

B. $(1/(b-a)) \times \int_a^b f(x) dx$ ✓ (réponse correcte)

C. $(b-a) \times \int_a^b f(x) dx$

D. $(f(a) + f(b))/2$

Explication : La valeur moyenne est $\mu = (1/(b-a)) \times \int_a^b f(x) dx$.

Question 5. La formule d'intégration par parties s'écrit :

A. $\int u'v = uv - \int uv'$ ✓ (réponse correcte)

B. $\int u'v = uv + \int uv'$

C. $\int u'v = u'v' - \int uv$

D. $\int u'v = \int u \times \int v$

Explication : La formule d'intégration par parties est $\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$, soit, de façon condensée, $\int u'v = uv - \int uv'$.

Module D — Nombres complexes

1ère année

Notions du module

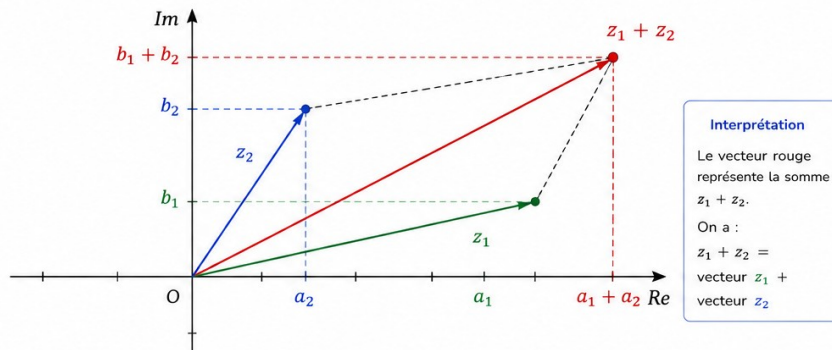
Code	Notion	Durée (h)
1D1	Forme algébrique d'un nombre complexe : somme, produit, conjugué, quotient	1
1D2	Représentation géométrique ; module et argument d'un nombre complexe	1
1D3	Forme trigonométrique et forme exponentielle ; opérations	2
1D4	Applications des nombres complexes	1

1D1 — Forme algébrique d'un nombre complexe : somme, produit, conjugué, quotient

1D1 — Forme algébrique d'un nombre complexe : somme, produit, conjugué, quotient

Addition de deux nombres complexes : règle du parallélogramme

Dans le plan complexe, l'addition $z_1 + z_2$ est représentée par la somme vectorielle des vecteurs z_1 et z_2 .



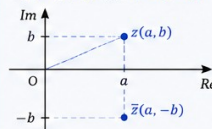
Expressions vectorielles

$$\begin{aligned} z_1 &= a_1 + b_1 i \\ &\rightarrow \text{vecteur } \overrightarrow{Oz_1} (a_1, b_1) \\ z_2 &= a_2 + b_2 i \\ &\rightarrow \text{vecteur } \overrightarrow{Oz_2} (a_2, b_2) \\ z_1 + z_2 &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i \\ &\rightarrow \text{vecteur } \overrightarrow{Oz_1 + z_2} (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \end{aligned}$$

- L'addition correspond à la règle du parallélogramme.
- Le plan complexe est muni d'une structure vectorielle.
- Les coordonnées d'un nombre complexe $z = a + bi$ sont (a, b) .

Conjugué géométrique

Si $z = a + bi$ alors $\bar{z} = a - bi$



Forme algébrique d'un nombre complexe

Tout nombre complexe z s'écrit :

$$z = a + bi \quad \text{avec } a, b \in \mathbb{R} \text{ et } i^2 = -1$$

• Somme

Si $z_1 = a_1 + b_1 i$ et $z_2 = a_2 + b_2 i$ alors

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$$

• Produit

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i \end{aligned}$$

• Conjugué

Si $z = a + bi$ alors $\bar{z} = a - bi$

• Quotient ($z_2 \neq 0$)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{\overline{z_1 z_2}}{|z_2|^2}$$

$$\text{avec } |z_2|^2 = a_2^2 + b_2^2$$

Les nombres complexes prolongent l'ensemble des nombres réels en introduisant un nombre i tel que $i^2 = -1$; ils permettent de résoudre des problèmes inaccessibles aux réels seuls et fournissent un outil de calcul puissant en électricité et en mécanique.

Forme algébrique

Tout nombre complexe z s'écrit de façon unique $z = a + ib$, où a et b sont des réels et i vérifie $i^2 = -1$. a est appelé partie réelle de z , notée $\text{Re}(z)$, et b est appelé partie imaginaire de z , notée $\text{Im}(z)$.

Égalité de deux nombres complexes

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

Somme et produit

$$(a+ib) + (c+id) = (a+c) + i(b+d). \quad (a+ib) \times (c+id) = (ac - bd) + i(ad + bc) \quad (\text{en développant et en remplaçant } i^2 \text{ par } -1).$$

Conjugué

Le conjugué de $z = a+ib$ est le nombre complexe $\bar{z} = a - ib$. On a $z \times \bar{z} = a^2 + b^2$, qui est un réel positif.

Quotient

Pour calculer un quotient de nombres complexes, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur, afin de faire apparaître un réel au dénominateur : $1/(c+id) = (c-id) / (c^2 + d^2)$.

Outils

Ces calculs, simples dans leur principe, sont menés à la main dans les cas courants et vérifiés ou effectués à l'aide d'une calculatrice disposant du mode complexe.

Exemple résolu

Énoncé

On donne $z_1 = 3 + 2i$ et $z_2 = 1 - i$.

- 1) Calculer $z_1 + z_2$ et $z_1 \times z_2$.
- 2) Calculer le conjugué de z_1 .

3) Calculer z_1 / z_2 .

Résolution

1) $z_1 + z_2 = (3+1) + i(2-1) = 4 + i$.

$z_1 \times z_2 = (3+2i)(1-i) = 3 \times 1 + 3 \times (-i) + 2i \times 1 + 2i \times (-i) = 3 - 3i + 2i - 2i^2 = 3 - i - 2 \times (-1) = 3 - i + 2 = 5 - i$.

2) Conjugué de z_1 : $\bar{z}_1 = 3 - 2i$.

3) $z_1/z_2 = (3+2i)/(1-i) = (3+2i)(1+i) / [(1-i)(1+i)] = (3 + 3i + 2i + 2i^2) / (1^2 + 1^2) = (3 + 5i - 2) / 2 = (1 + 5i) / 2 = 0,5 + 2,5i$.

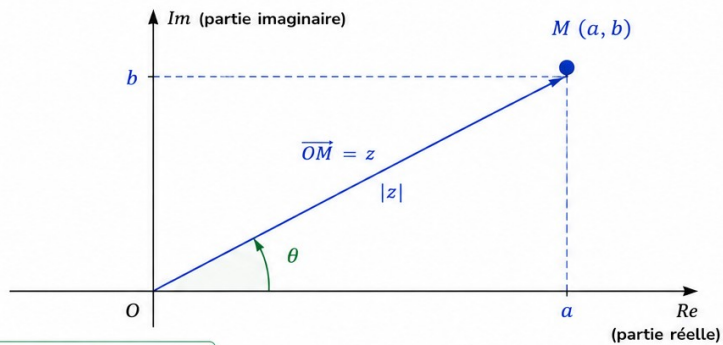
Applications métiers (Travaux Publics) : Représentation des grandeurs sinusoïdales en électricité (tension, intensité, impédance), composition de mouvements vibratoires, résolution d'équations liées à l'étude des oscillateurs et circuits.

1D2 — Représentation géométrique ; module et argument d'un nombre complexe

1D2 — Représentation géométrique ; module et argument d'un nombre complexe

Plan complexe $\mathbb{C}$

Tout nombre complexe $z = a + bi$
est représenté par le point $M(a, b)$ du plan.



Interprétation géométrique

Le point M image de z a pour
coordonnées (a, b) .

- $\overrightarrow{OM}$ est le vecteur associé à z .
- $|z|$ est la longueur de OM .
- θ est l'angle orienté entre
l'axe des réels et $\overrightarrow{OM}$.

En coordonnées : si $z = a + bi$ alors

$$\begin{cases} |z| = OM = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \tan \theta = \frac{b}{a} \quad (\text{si } a \neq 0) \end{cases}$$

et θ est choisi dans $(-\pi, \pi]$ (valeur principale).

Module d'un nombre complexe

Le module de $z = a + bi$ est défini par

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

C'est la distance de $M(a, b)$ à l'origine O .

Propriétés :

- $|z| \geq 0$ et $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$
- $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (z_2 \neq 0)$
- $|z| = |\bar{z}|$

Argument d'un nombre complexe

Un argument de $z \neq 0$ est tout réel θ tel que

$$z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta)$$

θ est l'angle orienté (en radians) entre l'axe
des réels et le vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Propriétés :

- Tout nombre complexe non nul admet une
infinité d'arguments : $\theta + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$
- Argument principal : $\arg(z) \in (-\pi, \pi]$
- $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) \quad [2\pi]$
- $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \quad [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) \quad [2\pi] \quad (z_2 \neq 0)$

Forme polaire (ou trigonométrique) : tout $z \neq 0$ s'écrit $z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta)$, où $|z|$ est le module et θ un argument de z .

Un nombre complexe peut être représenté par un point ou un vecteur du plan, ce qui donne un sens géométrique concret aux opérations sur les nombres complexes.

Plan complexe

On associe au nombre complexe $z = a + ib$ le point M de coordonnées $(a ; b)$ dans un repère orthonormé, appelé image de z ; réciproquement, z est appelé affixe du point M (ou du vecteur OM).

Module

Le module de $z = a + ib$, noté $|z|$, est la distance OM : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. On a la relation $|z|^2 = z \times \bar{z}$.

Argument

Pour z non nul, l'argument de z , noté $\arg(z)$, est une mesure en radians de l'angle orienté formé par l'axe des réels et le vecteur OM . Il est défini à $2k\pi$ près (k entier relatif).

Lien avec les coordonnées polaires

Si $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$, alors $a = r \cos(\theta)$ et $b = r \sin(\theta)$: le module et l'argument correspondent aux coordonnées polaires du point M .

Exemple résolu

Énoncé

Déterminer le module et un argument du nombre complexe $z = 1 + i\sqrt{3}$.

Résolution

Module : $|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$.

Argument θ : $\cos(\theta) = 1/2$ et $\sin(\theta) = \sqrt{3}/2$. Ces valeurs correspondent à $\theta = \pi/3$ (60°).

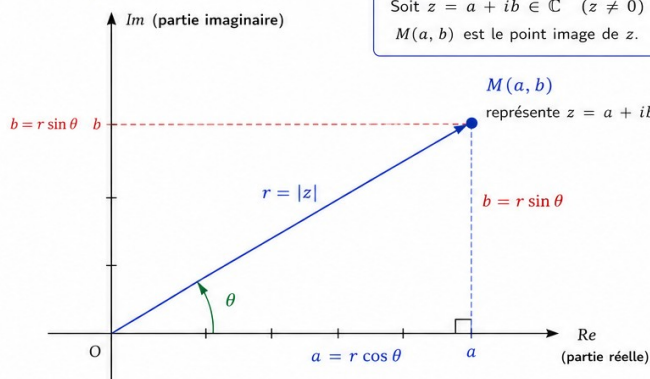
Donc $|z| = 2$ et $\arg(z) = \pi/3$ (à $2k\pi$ près).

Applications métiers (Travaux Publics) : Représentation des grandeurs sinusoïdales en électricité (tension, intensité, impédance), composition de mouvements vibratoires, résolution d'équations liées à l'étude des oscillateurs et circuits.

1D3 — Forme trigonométrique et forme exponentielle ; opérations

1D3 — Forme trigonométrique et forme exponentielle ; opérations

Plan complexe $\mathbb{C}$



Des formes équivalentes

1) Forme algébrique $z = a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$)

avec $\begin{cases} a = \operatorname{Re}(z) \\ b = \operatorname{Im}(z) \end{cases}$

2) Forme trigonométrique $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

avec $\begin{cases} r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \theta = \arg(z) \pmod{2\pi} \end{cases}$

3) Forme exponentielle $z = r e^{i\theta}$

avec $\begin{cases} r = |z| \\ \theta = \arg(z) \pmod{2\pi} \end{cases}$

Ainsi : $z = a + ib = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta}$

Lien entre les coordonnées et (r, θ)

À partir de (a, b) :

$$\begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \theta = \operatorname{atan2}(b, a) \end{cases} \pmod{2\pi}$$

où $\operatorname{atan2}(b, a)$ est l'argument de z dans l'intervalle $(-\pi, \pi]$.

Rappel : $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

À partir de (r, θ) :

$$\begin{cases} a = r \cos \theta \\ b = r \sin \theta \end{cases}$$

Cas particuliers

- $z = 0$: pas d'argument ($r = 0$).
- z réel positif : $\theta = 0 \pmod{2\pi}$.
- z réel négatif : $\theta = \pi \pmod{2\pi}$.
- z imaginaire pur positif : $\theta = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$.
- z imaginaire pur négatif : $\theta = -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$.

Opérations en forme trigonométrique / exponentielle

• Produit

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

(modules multipliés, arguments additionnés)

• Quotient ($z_2 \neq 0$)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

(modules divisés, arguments soustraits)

• Puissance ($n \in \mathbb{Z}$)

$$z^n = r^n e^{in\theta}$$

(De Moivre)

• Racines n -ièmes

$$(n \in \mathbb{N}^*, z \neq 0) \quad z_k = r^{1/n} e^{i(\frac{\theta + 2k\pi}{n})}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Exemples

$$\textcircled{1} \quad z = -1 + i\sqrt{3} \rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \\ \theta = \operatorname{atan2}(\sqrt{3}, -1) = \frac{2\pi}{3} \end{cases} \rightarrow z = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = 2 e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$\textcircled{2} \quad z_1 = 2 e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad z_2 = 3 e^{-i\frac{\pi}{6}} \rightarrow z_1 z_2 = 6 e^{i(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6})} = 6 e^{i\frac{\pi}{12}}$$

Formule d'Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

En complément de la forme algébrique, la forme trigonométrique et son écriture condensée, la forme exponentielle, sont particulièrement adaptées au calcul de produits, de quotients et de puissances de nombres complexes.

Forme trigonométrique

Tout nombre complexe non nul z , de module r et d'argument θ , s'écrit $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$.

Forme exponentielle

On note $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ (notation d'Euler). La forme exponentielle de z s'écrit alors $z = r e^{i\theta}$, avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$.

Produit, quotient, puissance sous forme exponentielle

Pour $z = r e^{i\theta}$ et $z' = r' e^{i\theta'}$:

$z \times z' = r r' e^{i(\theta + \theta')}$ (les modules se multiplient, les arguments s'ajoutent) ;

$z / z' = (r/r') e^{i(\theta - \theta')}$ ($r' \neq 0$) ;

$z^n = r^n e^{in\theta}$ pour tout entier n (formule de Moivre : $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$).

Passage d'une forme à l'autre

On passe de la forme algébrique à la forme trigonométrique (ou exponentielle) en calculant le module et l'argument (cf. notion précédente) ; on passe de la forme trigonométrique à la forme algébrique en calculant $a = r \cos \theta$ et $b = r \sin \theta$.

Exemple résolu

Énoncé

On donne $z = 2 e^{i(\pi/3)}$ et $z' = 3 e^{i(\pi/6)}$.

- Calculer le module et un argument de $z \times z'$.
- Calculer le module et un argument de z^3 .
- Donner la forme algébrique de z .

Résolution

- $z \times z' = (2 \times 3) e^{i(\pi/3 + \pi/6)} = 6 e^{i(2\pi/6 + \pi/6)} = 6 e^{i(3\pi/6)} = 6 e^{i(\pi/2)}$. Module 6, argument $\pi/2$.
- $z^3 = 2^3 e^{i(3 \times \pi/3)} = 8 e^{i(\pi)}$. Module 8, argument π .

$$3) z = 2 e^{i\pi/3} = 2(\cos(\pi/3) + i \sin(\pi/3)) = 2 \times (1/2 + i \times \sqrt{3}/2) = 1 + i\sqrt{3}.$$

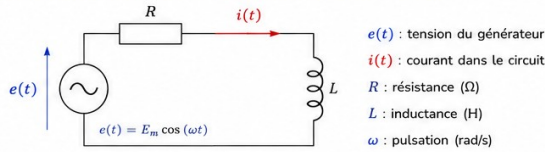
Applications métiers (Travaux Publics) : Représentation des grandeurs sinusoïdales en électricité (tension, intensité, impédance), composition de mouvements vibratoires, résolution d'équations liées à l'étude des oscillateurs et circuits.

1D4 — Applications des nombres complexes

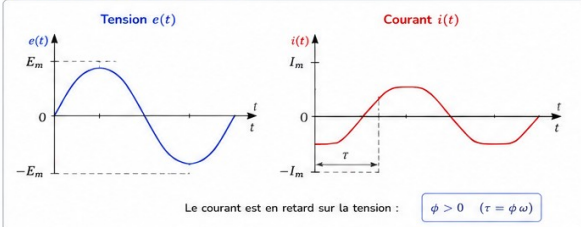
1D4 — Applications des nombres complexes

Un régime sinusoïdal permanent peut être étudié à l'aide des nombres complexes (représentation de Fresnel).

1) Circuit électrique série R-L alimenté par une tension sinusoïdale



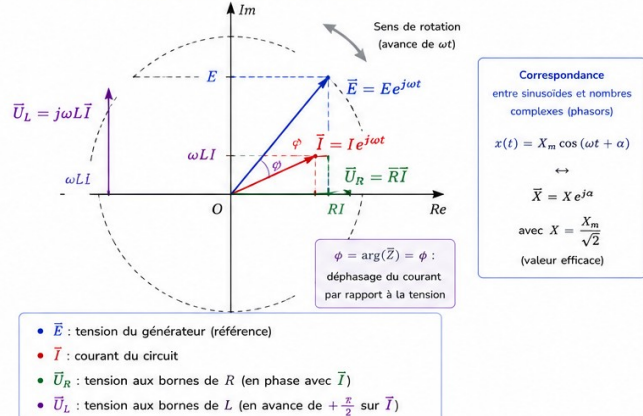
3) Grandeurs temporelles associées



4) Impédance et relations dans le domaine complexe

Impédances des dipôles	Impédance équivalente du circuit série R-L	Relation entre tension et courant (phasors)
$Z_R = R$ $Z_L = j\omega L$	$Z = R + j\omega L = Z e^{j\phi}$	$\vec{E} = Z \vec{I}$ donc $\vec{I} = \frac{\vec{E}}{Z}$
avec $ Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$ et $\phi = \arg(Z) = \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$		

2) Représentation de Fresnel (plan complexe)



5) Conséquences (grâce au formalisme complexe)

Loi d'Ohm généralisée	Puissances (valeurs efficaces)	Intérêt
$\vec{E} = Z \vec{I}$ avec $Z = R + j\omega L$ En module et argument : $\begin{cases} E = Z I \\ \phi = \arg(Z) \end{cases}$	- Puissance active : $P = R I^2$ - Puissance réactive : $Q = \omega L I^2$ - Puissance apparente : $S = E I$ Triangle des puissances :	- Calculs simples (produits, quotients) - Déphasages visualisés - Méthode générale (tous circuits linéaires sinusoïdaux)

En résumé

- Les sinusoïdes sont représentées par des nombres complexes (phasors).
- Les relations temporelles deviennent algébriques dans le plan complexe.
- Les modules donnent les valeurs efficaces, les arguments donnent les déphasages.
- Outil puissant pour l'étude des circuits en régime sinusoïdal permanent.

Les nombres complexes permettent de résoudre toute équation du second degré à coefficients réels, et fournissent un outil de calcul très efficace pour représenter et manipuler les grandeurs sinusoïdales rencontrées en électricité.

Résolution d'une équation du second degré à coefficients réels

Pour l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c réels, $a \neq 0$), on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$:

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles distinctes $x_1 = (-b - \sqrt{\Delta})/(2a)$ et $x_2 = (-b + \sqrt{\Delta})/(2a)$;
- si $\Delta = 0$, une solution réelle double $x_0 = -b/(2a)$;
- si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées $x_1 = (-b - i\sqrt{-\Delta})/(2a)$ et $x_2 = (-b + i\sqrt{-\Delta})/(2a) = \bar{x}_1$.

Représentation d'un signal sinusoïdal

Une grandeur sinusoïdale $s(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ peut être associée au nombre complexe (amplitude complexe) $A e^{j\phi}$, qui condense l'amplitude A et la phase ϕ . Cette représentation transforme les opérations de déphasage et de composition de signaux en simples produits ou sommes de nombres complexes.

Impédance complexe

En régime sinusoïdal, on associe à un dipôle électrique une impédance complexe Z , telle que la tension complexe soit $U = Z \times I$ (I étant le courant complexe). Cette écriture permet de traiter simplement les circuits comportant résistances, bobines et condensateurs en régime sinusoïdal.

Exemple résolu

Énoncé

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $x^2 - 4x + 13 = 0$.

Résolution

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 13 = 16 - 52 = -36 < 0.$$

$$\sqrt{-\Delta} = \sqrt{36} = 6.$$

Les solutions sont $x_1 = (4 - 6i)/2 = 2 - 3i$ et $x_2 = (4 + 6i)/2 = 2 + 3i$.

L'équation admet deux solutions complexes conjuguées : $x_1 = 2 - 3i$ et $x_2 = 2 + 3i$.

Applications métiers (Travaux Publics) : *Représentation des grandeurs sinusoïdales en électricité (tension, intensité, impédance), composition de mouvements vibratoires, résolution d'équations liées à l'étude des oscillateurs et circuits.*

Exercices d'application

Ex. D1 — Impédance d'un circuit de chantier

Énoncé

Un moteur électrique de chantier est modélisé, en régime sinusoïdal, par une impédance complexe $Z = 8 + 6i$ (en ohms).

- 1) Calculer le module de Z . Que représente-t-il physiquement (impédance en Ω) ?
- 2) Déterminer un argument de Z , arrondi au degré près (on rappelle $\tan(\theta) = \text{partie imaginaire} / \text{partie réelle}$).

Corrigé

- 1) $|Z| = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10 \Omega$. C'est le module de l'impédance, qui relie les amplitudes de la tension et du courant ($U = |Z| \times I$).
- 2) $\tan(\theta) = 6/8 = 0,75$, avec $\cos(\theta) = 8/10 = 0,8 > 0$ et $\sin(\theta) = 6/10 = 0,6 > 0$ (θ dans le premier quadrant). $\theta = \arctan(0,75) \approx 36,9^\circ$. L'argument de Z vaut environ $36,9^\circ$, ce qui représente le déphasage entre tension et courant.

Ex. D2 — Composition de deux vibrations

Énoncé

Deux vibrations sinusoïdales de même fréquence, appliquées à un même point d'un ouvrage, sont représentées par les amplitudes complexes $z_1 = 3 + 4i$ et $z_2 = 5 - 12i$ (en mm).

- 1) Calculer l'amplitude complexe résultante $z = z_1 + z_2$.
- 2) Calculer le module de z , qui représente l'amplitude de la vibration résultante.

Corrigé

- 1) $z = z_1 + z_2 = (3+5) + i(4-12) = 8 - 8i$.
- 2) $|z| = \sqrt{8^2 + (-8)^2} = \sqrt{64+64} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2} \approx 11,31 \text{ mm}$.

Évaluation de fin de module (QCM)

Question 1. Pour un nombre complexe $z = a + ib$, à quoi est égal $z \times \bar{z}$ ($\bar{z}$ étant le conjugué de z) ?

A. $a^2 - b^2$

B. $a^2 + b^2$ ✓ (réponse correcte)

C. $2a$

D. 0

Explication : $z \times \bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2$ (réel positif).

Question 2. Le module d'un nombre complexe $z = a + ib$ est donné par :

A. $a + b$

B. $\sqrt{a^2 - b^2}$

C. $\sqrt{a^2 + b^2}$ ✓ (réponse correcte)

D. $a \times b$

Explication : Le module de z est la distance à l'origine dans le plan complexe : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Question 3. Sous forme exponentielle, le produit de $z = r e^{i\theta}$ et $z' = r' e^{i\theta'}$ vaut :

A. $r r' e^{i(\theta+\theta')}$ ✓ (réponse correcte)

B. $r r' e^{i(\theta-\theta')}$

C. $(r+r') e^{i\theta\theta'}$

D. $r r' e^{i\theta\theta'}$

Explication : Sous forme exponentielle, les modules se multiplient et les arguments s'ajoutent : $z z' = r r' e^{i(\theta+\theta')}$.

Question 4. Pour une équation du second degré à coefficients réels de discriminant $\Delta < 0$, les solutions sont :

A. Deux réels distincts

B. Un réel double

C. Deux complexes conjugués ✓ (réponse correcte)

D. Il n'y a pas de solution

Explication : Lorsque $\Delta < 0$, l'équation admet deux solutions complexes conjuguées.

Question 5. En électricité, l'impédance complexe Z permet de relier tension complexe U et courant complexe I par la relation :

A. $U = Z + I$

B. $U = Z \times I$ ✓ (réponse correcte)

C. $U = Z / I$

D. $U = Z - I$

Explication : En régime sinusoïdal, la loi d'Ohm complexe s'écrit $U = Z \times I$, Z étant l'impédance complexe du dipôle.

Module E — Statistique descriptive

1ère année

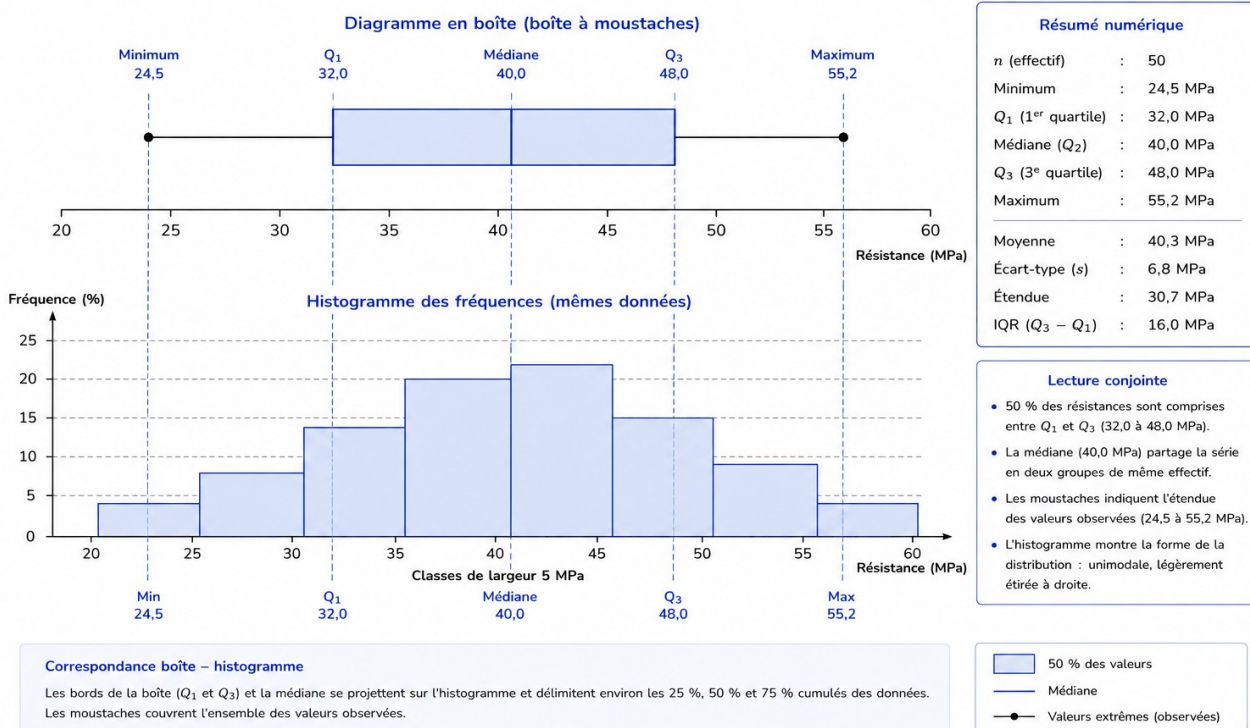
Notions du module

Code	Notion	Durée (h)
1E1	Série statistique à une variable : résumés numériques et graphiques	1
1E2	Série statistique à deux variables ; ajustement affine par la méthode des moindres carrés	2
1E3	Coefficient de corrélation linéaire	1

1E1 — Série statistique à une variable : résumés numériques et graphiques

1E1 — Série statistique à une variable : résumés numériques et graphiques

Exemple : résistances à la compression du béton à 28 jours (MPa) — $n = 50$ essais



Résumer une série de mesures ou de données de chantier par quelques indicateurs numériques et graphiques permet d'en dégager rapidement les tendances et la dispersion, en réactivant et en approfondissant les notions vues au lycée.

Caractéristiques de position

La moyenne d'une série est la somme des valeurs divisée par l'effectif total. La médiane est la valeur qui partage la série ordonnée en deux effectifs égaux (autant de valeurs inférieures que de valeurs supérieures).

Caractéristiques de dispersion

L'étendue est la différence entre la plus grande et la plus petite valeur de la série. L'écart interquartile ($Q_3 - Q_1$) mesure l'étalement de la moitié centrale des données. L'écart type mesure la dispersion des valeurs autour de la moyenne.

Représentations graphiques

Histogramme (pour des données regroupées en classes), diagramme en boîte (boîte à moustaches, représentant médiane, quartiles et valeurs extrêmes), diagramme en bâtons pour une série discrète.

Outils

Le calcul de ces résumés numériques et le tracé des représentations graphiques se font à l'aide d'un logiciel (tableur) ou d'une calculatrice, l'accent étant mis sur l'interprétation plutôt que sur le calcul manuel.

Regroupement par classes

Lorsque les données sont nombreuses, un regroupement par classes facilite la lecture ; le choix du nombre et de la largeur des classes influence la lisibilité de l'histogramme obtenu, ce que l'on peut explorer à l'aide d'un tableau.

Exemple résolu

Énoncé

Une série de 7 essais de résistance à la compression d'un béton donne (en MPa) : 28 ; 30 ; 27 ; 32 ; 29 ; 31 ; 26.

- 1) Calculer la moyenne de cette série.
- 2) Déterminer la médiane de cette série.

3) Déterminer l'étendue de la série.

Résolution

1) Moyenne = $(28+30+27+32+29+31+26)/7 = 203/7 = 29$ MPa.

2) Série ordonnée : 26 ; 27 ; 28 ; 29 ; 30 ; 31 ; 32. L'effectif est 7 (impair), la médiane est la 4^e valeur : médiane = 29 MPa.

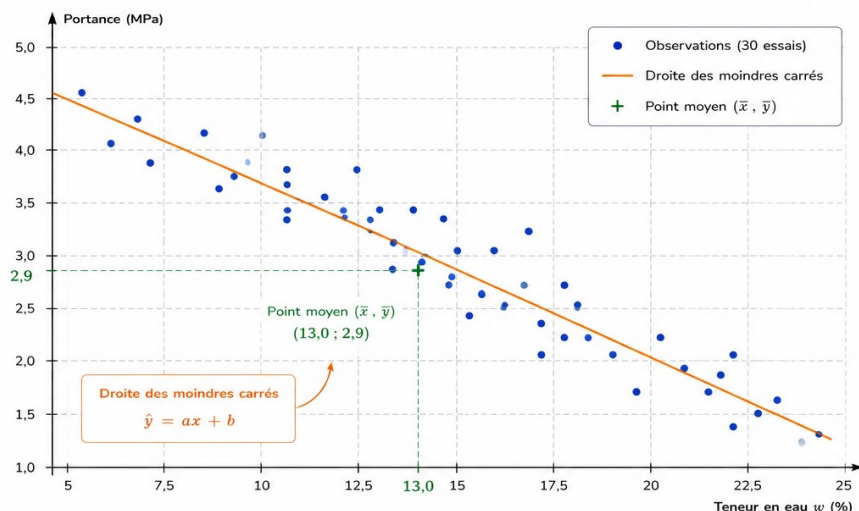
3) Étendue = valeur max – valeur min = $32 - 26 = 6$ MPa.

Applications métiers (Travaux Publics) : *Exploitation de séries de mesures ou de relevés de chantier (résistances de matériaux, résultats d'essais géotechniques, relevés topographiques), corrélation entre deux grandeurs (ex. teneur en eau / portance d'un sol).*

1E2 — Série statistique à deux variables ; ajustement affine par la méthode des moindres carrés

1E2 — Série statistique à deux variables ; ajustement affine par la méthode des moindres carrés

Exemple : influence de la teneur en eau sur la portance d'un sol compacté ($n = 30$ essais)



Lecture du graphique

- Le nuage de points montre une relation décroissante entre la teneur en eau et la portance.
- La droite des moindres carrés (orange) résume la tendance moyenne du nuage.
- Le point moyen $(\bar{x}, \bar{y})$ est le centre de gravité du nuage ; la droite passe toujours par ce point.

Méthode des moindres carrés

On cherche la droite $\hat{y} = ax + b$ qui minimise la somme des carrés des résidus :

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \text{ minimale}$$

où y_i sont les valeurs observées et $\hat{y}_i$ les valeurs estimées par la droite.

Ajustement affine (méthode des moindres carrés)

La droite d'ajustement est de la forme :

$$\hat{y} = ax + b$$

avec :

- pente $a = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\text{var}(X)} = -0,163$
- ordonnée à l'origine $b = \bar{y} - a\bar{x} = 5,02$

$$\hat{y} = -0,163x + 5,02$$

Interprétation :

Chaque augmentation de 1 % de la teneur en eau entraîne en moyenne une diminution de 0,163 MPa de la portance.

Indicateurs associés

- $\bar{x} = 13,0$ % (moyenne des teneurs en eau)
- $\bar{y} = 2,9$ MPa (moyenne des portances)
- $r = -0,86$ (corrélation linéaire forte et négative)
- $R^2 = 0,74$ (74 % de la variabilité expliquée par le modèle linéaire)



À retenir

La méthode des moindres carrés fournit la meilleure droite d'ajustement affine au sens de l'erreur quadratique. Elle est largement utilisée en génie civil pour modéliser des relations expérimentales (sols, bétons, matériaux...).

Légende des symboles

- x : teneur en eau (%)
- y : portance (MPa)
- $\hat{y}$: portance estimée par la droite

Lorsque deux grandeurs sont mesurées simultanément, on cherche s'il existe une relation entre elles, et on peut proposer un modèle affine adapté au nuage de points obtenu.

Nuage de points, point moyen

Une série statistique à deux variables (x ; y) se représente par un nuage de points. Le point moyen G a pour coordonnées $(\bar{x} ; \bar{y})$, moyennes respectives des valeurs de x et de y .

Ajustement affine

Lorsque le nuage de points a une forme globalement allongée, on peut chercher une droite d'ajustement $y = ax + b$ qui approche au mieux le nuage.

Méthode des moindres carrés

La droite des moindres carrés est celle qui minimise la somme des carrés des écarts verticaux entre les points du nuage et la droite. Un logiciel ou une calculatrice fournit directement les coefficients a et b de cette droite ; on observe, à l'aide du logiciel, le caractère minimal de cette somme.

Liaison statistique et causalité

Un ajustement affine traduit une liaison statistique entre deux variables, mais ne prouve pas nécessairement de relation de cause à effet entre elles : cette distinction est importante dans l'interprétation des résultats.

Interpolation et extrapolation

Une fois l'ajustement obtenu, on peut l'utiliser pour estimer une valeur de y pour un x situé à l'intérieur de la plage étudiée (interpolation) ou en dehors de cette plage (extrapolation, à utiliser avec prudence).

Changement de variable

Lorsque le nuage de points n'est pas allongé, un changement de variable simple (donné dans l'énoncé) permet parfois de se ramener à un ajustement affine sur les nouvelles variables.

Exemple résolu

Énoncé

On mesure la teneur en eau x (%) et la portance y (indice CBR) d'un sol pour 5 échantillons : (10 ; 45), (12 ;

40), (14 ; 34), (16 ; 30), (18 ; 24).

Un ajustement affine par moindres carrés, obtenu à l'aide d'un tableur, donne $y = -2,6x + 71$.

- 1) Calculer le point moyen du nuage.
- 2) Vérifier que le point moyen appartient (à l'arrondi près) à la droite d'ajustement.
- 3) Utiliser cet ajustement pour estimer la portance pour une teneur en eau de 15 %.

Résolution

1) $\bar{x} = (10+12+14+16+18)/5 = 70/5 = 14$. $\bar{y} = (45+40+34+30+24)/5 = 173/5 = 34,6$. Point moyen G(14 ; 34,6).

2) Pour $x = 14$: $y = -2,6 \times 14 + 71 = -36,4 + 71 = 34,6$. On retrouve exactement $\bar{y} = 34,6$: le point moyen appartient bien à la droite des moindres carrés (propriété générale de cette droite).

3) Pour $x = 15$: $y = -2,6 \times 15 + 71 = -39 + 71 = 32$. Portance estimée : 32 (interpolation, car $x = 15$ est compris entre 10 et 18).

Applications métiers (Travaux Publics) : Exploitation de séries de mesures ou de relevés de chantier (résistances de matériaux, résultats d'essais géotechniques, relevés topographiques), corrélation entre deux grandeurs (ex. teneur en eau / portance d'un sol).

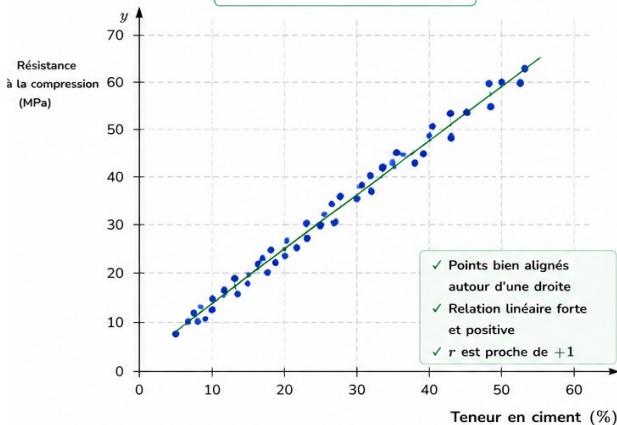
1E3 — Coefficient de corrélation linéaire

1E3 — Coefficient de corrélation linéaire

Le coefficient de corrélation linéaire r mesure l'intensité et le sens de la relation linéaire entre deux variables quantitatives.

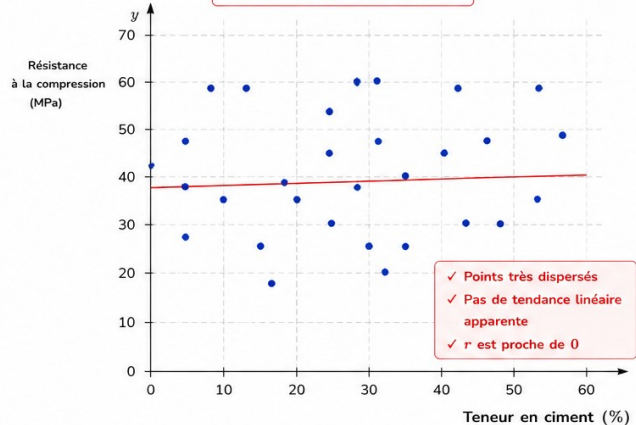
À gauche : relation linéaire forte et positive

r proche de 1 ($r \approx 0,95$)



À droite : relation linéaire nulle (pas de relation linéaire)

r proche de 0 ($r \approx 0,05$)



Interprétation du coefficient de corrélation linéaire r

- $r > 0$: relation linéaire positive (quand x augmente, y tend à augmenter).
- $r < 0$: relation linéaire négative (quand x augmente, y tend à diminuer).
- r proche de 1 ou -1 : relation linéaire forte.
- r proche de 0 : absence de relation linéaire.

Repères de valeurs de r

- $|r| \geq 0,8$: corrélation forte
- $0,5 \leq |r| < 0,8$: corrélation modérée
- $0,2 \leq |r| < 0,5$: corrélation faible
- $|r| < 0,2$: corrélation très faible ou nulle

Formule

$$r = \frac{\text{cov}(X, Y)}{s_X s_Y}$$

avec :

- $\text{cov}(X, Y)$: covariance
- s_X : écart-type de X
- s_Y : écart-type de Y

Le coefficient de corrélation linéaire quantifie la qualité d'un ajustement affine, c'est-à-dire à quel point les points du nuage sont proches d'être alignés.

Définition et propriétés

Le coefficient de corrélation linéaire r , obtenu à l'aide d'un logiciel ou d'une calculatrice, est un nombre compris entre -1 et 1 . Plus $|r|$ est proche de 1 , meilleure est la qualité de l'ajustement affine (points proches d'être alignés) ; plus $|r|$ est proche de 0 , moins l'ajustement affine est pertinent.

Signe de r

Un coefficient r positif indique une tendance croissante (quand x augmente, y augmente en moyenne) ; un coefficient r négatif indique une tendance décroissante.

Usage pour comparer deux ajustements

Le coefficient de corrélation permet de comparer la qualité de deux ajustements (par exemple un ajustement affine direct et un ajustement obtenu après changement de variable) et de choisir le modèle le plus pertinent.

Exemple résolu

Énoncé

Pour la série teneur en eau / portance de l'exemple précédent, un logiciel donne un coefficient de corrélation linéaire $r \approx -0,998$.

Interpréter cette valeur.

Résolution

$|r| \approx 0,998$ est très proche de 1 : l'ajustement affine est de très bonne qualité, les points du nuage sont presque alignés. Le signe négatif de r confirme la tendance observée sur le nuage : la portance diminue lorsque la teneur en eau augmente. On peut donc utiliser le modèle affine obtenu avec une bonne confiance, au moins pour des valeurs de x proches de la plage étudiée (10 % à 18 %).

Applications métiers (Travaux Publics) : Exploitation de séries de mesures ou de relevés de chantier (résistances de matériaux, résultats d'essais géotechniques, relevés topographiques), corrélation entre deux grandeurs (ex. teneur en eau / portance d'un sol).

Exercices d'application

Ex. E1 — Analyse granulométrique

Énoncé

Une série de 8 mesures du pourcentage de fines ($< 80 \mu\text{m}$) dans un granulat donne : 5,2 ; 4,8 ; 5,5 ; 6,1 ; 4,9 ; 5,3 ; 5,0 ; 5,6 (en %).

- 1) Calculer la moyenne de cette série.
- 2) Calculer l'étendue de cette série.
- 3) La spécification technique impose un pourcentage de fines inférieur à 6 %. Combien de mesures dépassent cette valeur ?

Corrigé

1) Moyenne = $(5,2+4,8+5,5+6,1+4,9+5,3+5,0+5,6)/8 = 42,4/8 = 5,3 \%$.

2) Étendue = $6,1 - 4,8 = 1,3 \%$.

3) Une seule mesure (6,1 %) dépasse la valeur seuil de 6 %.

Ex. E2 — Corrélation résistance / dosage en ciment

Énoncé

On mesure, sur 5 gâchées, le dosage en ciment x (kg/m^3) et la résistance à 28 jours y (MPa) : (300 ; 25), (320 ; 28), (340 ; 31), (360 ; 33), (380 ; 37).

- 1) Calculer le point moyen du nuage.
- 2) Un tableur donne l'ajustement affine $y = 0,145x - 18,5$ (coefficients arrondis) et un coefficient de corrélation $r \approx 0,996$. Commenter la qualité de cet ajustement.
- 3) Estimer, à l'aide de cet ajustement, la résistance pour un dosage de 350 kg/m^3 .

Corrigé

1) $\bar{x} = (300+320+340+360+380)/5 = 1700/5 = 340$. $\bar{y} = (25+28+31+33+37)/5 = 154/5 = 30,8$. Point moyen G(340 ; 30,8).

2) $|r| \approx 0,996$ est très proche de 1 : l'ajustement affine est de très bonne qualité, les points sont presque alignés.

3) $y = 0,145 \times 350 - 18,5 = 50,75 - 18,5 = 32,25 \text{ MPa}$ (estimation par interpolation, 350 étant compris entre 300 et 380).

Évaluation de fin de module (QCM)

Question 1. Pour une série statistique à une variable, la médiane est :

- A. La moyenne des valeurs
- B. La valeur qui partage la série ordonnée en deux effectifs égaux ✓ (réponse correcte)**
- C. La plus grande valeur de la série
- D. L'écart type de la série

Explication : La médiane sépare la série ordonnée en deux parties de même effectif.

Question 2. La droite d'ajustement obtenue par la méthode des moindres carrés minimise :

- A. La somme des écarts verticaux
- B. La somme des carrés des écarts verticaux entre les points et la droite ✓ (réponse correcte)**
- C. La distance entre les deux premiers points
- D. Le nombre de points au-dessus de la droite

Explication : La méthode des moindres carrés minimise la somme des carrés des écarts (résidus) entre les points du nuage et la droite d'ajustement.

Question 3. Un coefficient de corrélation linéaire r proche de 0 signifie :

- A. Un ajustement affine de très bonne qualité
- B. Un ajustement affine peu pertinent ✓ (réponse correcte)**
- C. Une relation de cause à effet certaine
- D. Que toutes les valeurs de x sont égales

Explication : Plus $|r|$ est proche de 0, moins l'ajustement affine est pertinent (points peu alignés).

Question 4. Le point moyen $G(\bar{x} ; \bar{y})$ d'un nuage de points appartient toujours à :

- A. L'axe des abscisses
- B. La droite d'ajustement des moindres carrés ✓ (réponse correcte)**
- C. L'axe des ordonnées
- D. Aucune droite en particulier

Explication : Une propriété de la droite des moindres carrés est de toujours passer par le point moyen du nuage.

Question 5. Un ajustement affine entre deux variables traduit :

- A. Nécessairement une relation de cause à effet
- B. Une liaison statistique, sans préjuger d'une relation de cause à effet ✓ (réponse correcte)**
- C. Une absence totale de lien entre les variables
- D. Une erreur de mesure systématique

Explication : Un ajustement affine met en évidence une liaison statistique entre deux variables, qu'il convient de distinguer d'une relation de cause à effet.

Module F — Probabilités 1

1ère année

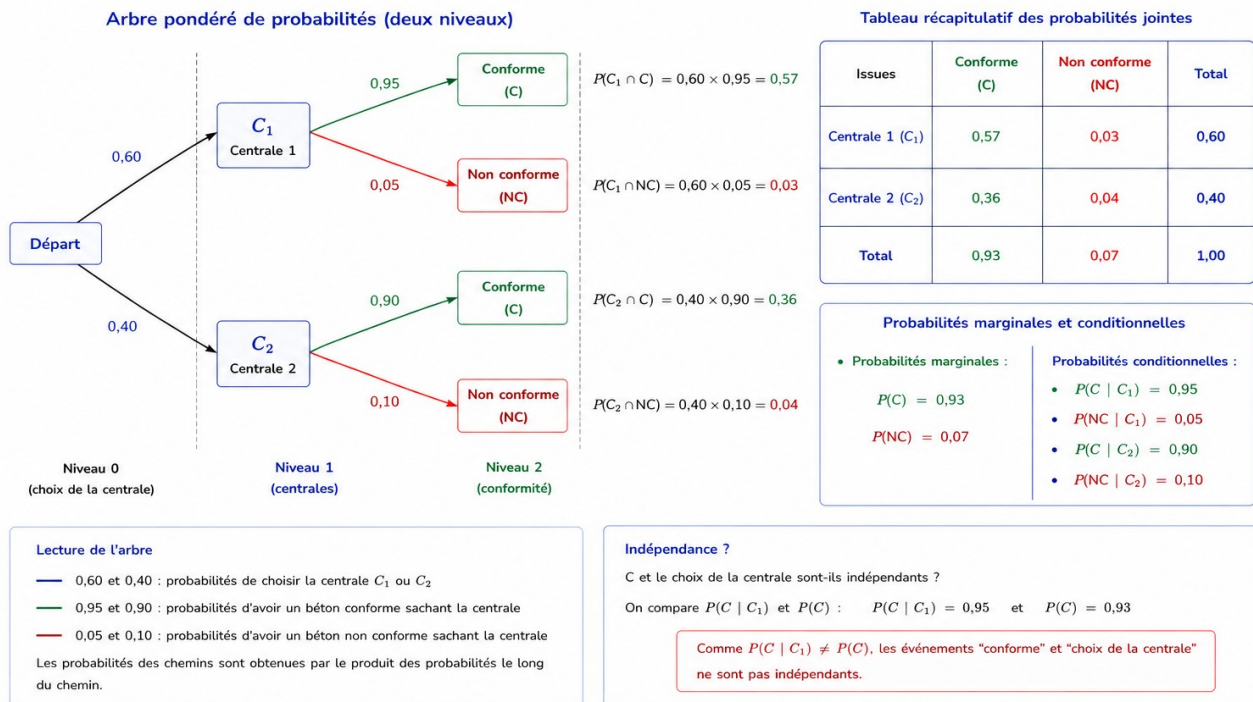
Notions du module

Code	Notion	Durée (h)
1F1	Conditionnement et indépendance ; arbres et tableaux de probabilités	2
1F2	Loi binomiale : reconnaissance, représentation, calcul de probabilités	2
1F3	Espérance, variance et écart type de la loi binomiale	1
1F4	Loi uniforme sur $[a, b]$	1
1F5	Loi normale ; approche graphique et calcul de probabilités	2
1F6	Approximation d'une loi binomiale par une loi normale ; somme de variables indépendantes ; théorème de la limite centrée	2

1F1 — Conditionnement et indépendance ; arbres et tableaux de probabilités

1F1 — Conditionnement et indépendance ; arbres et tableaux de probabilités

Exemple : production de béton provenant de deux centrales



La probabilité conditionnelle formalise l'idée d'une probabilité réévaluée à la lumière d'une information supplémentaire ; les arbres et tableaux de probabilités en sont les outils de représentation privilégiés.

Probabilité conditionnelle

Pour un événement A de probabilité non nulle, la probabilité de B sachant A, notée $P_a(B)$, est définie par $P_a(B) = P(A \cap B) / P(A)$. On en déduit $P(A \cap B) = P(A) \times P_a(B)$.

Arbre pondéré

Un arbre pondéré représente une succession d'événements ; sur chaque branche figure une probabilité (simple ou conditionnelle). La probabilité associée à un chemin s'obtient en multipliant les probabilités portées par les branches de ce chemin. Un arbre correctement construit constitue une preuve.

Tableau de probabilités (tableau croisé)

Alternative à l'arbre, le tableau croise deux caractères et permet de lire directement des probabilités d'intersection, ainsi que les probabilités marginales (totaux de lignes et de colonnes).

Partition de l'univers et probabilités totales

Si les événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ forment une partition de l'univers, alors, pour tout événement B : $P(B) = P(A_1) \times P_{\{A_1\}}(B) + P(A_2) \times P_{\{A_2\}}(B) + \dots + P(A_n) \times P_{\{A_n\}}(B)$. Cette formule (dite des probabilités totales) n'est pas exigée en tant que telle, mais sa mise en œuvre, à l'aide d'un arbre, doit être maîtrisée.

Indépendance de deux événements

A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, ce qui équivaut à $P_a(B) = P(B)$ (la réalisation de A ne modifie pas la probabilité de B).

Exemple résolu

Énoncé

Un laboratoire de contrôle qualité reçoit des éprouvettes de béton provenant de deux centrales : 60 % de la centrale C1 et 40 % de la centrale C2. On sait que 5 % des éprouvettes de C1 sont non conformes, contre 12 % pour C2.

1) Construire l'arbre pondéré associé à cette situation.

2) Calculer la probabilité qu'une éprouvette prise au hasard soit non conforme.

Résolution

1) Arbre : à la racine, deux branches C1 (probabilité 0,6) et C2 (probabilité 0,4). Depuis C1, deux branches : « non conforme » (0,05) et « conforme » (0,95). Depuis C2, deux branches : « non conforme » (0,12) et « conforme » (0,88).

2) Notons NC l'événement « l'éprouvette est non conforme ». D'après la formule des probabilités totales appliquée à la partition {C1, C2} :

$$P(\text{NC}) = P(\text{C1}) \times P_{\{\text{C1}\}}(\text{NC}) + P(\text{C2}) \times P_{\{\text{C2}\}}(\text{NC}) = 0,6 \times 0,05 + 0,4 \times 0,12 = 0,03 + 0,048 = 0,078.$$

La probabilité qu'une éprouvette prise au hasard soit non conforme est de 0,078, soit 7,8 %.

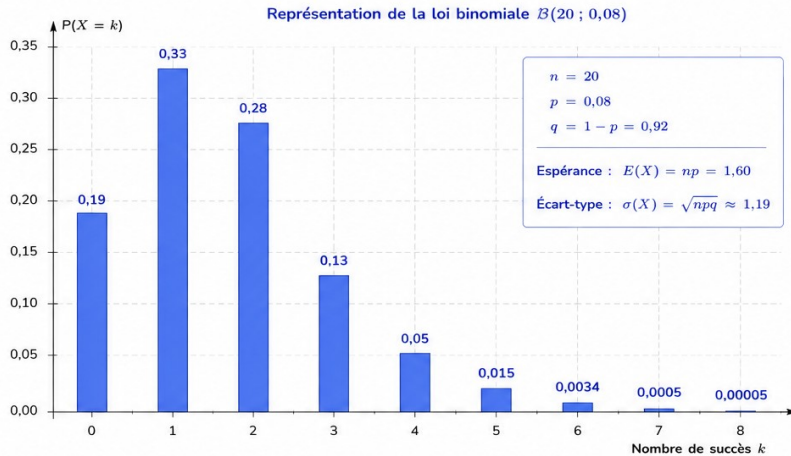
Applications métiers (Travaux Publics) : *Contrôle qualité de fabrication (bétons, enrobés, matériaux), fiabilité d'équipements de chantier, gestion des risques et des non-conformités.*

1F2 — Loi binomiale : reconnaissance, représentation, calcul de probabilités

1F2 — Loi binomiale : reconnaissance, représentation, calcul de probabilités

On considère une variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ avec n épreuves de Bernoulli indépendantes de probabilité de succès p .

Exemple : $X \sim \mathcal{B}(20; 0,08)$ (nombre de camions conformes sur 20 livraisons)



Loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$

- Reconnaissance :
 - n épreuves de Bernoulli indépendantes ;
 - deux issues : succès (S) de probabilité p et échec (E) de probabilité $q = 1 - p$;
 - X = nombre de succès observés.
- Probabilité d'obtenir exactement k succès ($k = 0, 1, \dots, n$) :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

avec $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Calculs de probabilités (exemples)

- $P(X = 0) = \binom{20}{0} (0,08)^0 (0,92)^{20} \approx 0,1900$
- $P(X = 1) = \binom{20}{1} (0,08)^1 (0,92)^{19} \approx 0,3296$
- $P(X = 2) = \binom{20}{2} (0,08)^2 (0,92)^{18} \approx 0,2824$
- $P(X \leq 2) = P(0) + P(1) + P(2) \approx 0,8020$
- $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) \approx 0,1980$

Lecture du graphique

- L'axe des abscisses donne le nombre de succès k (de 0 à 20).
- L'axe des ordonnées donne la probabilité $P(X = k)$.
- La distribution est dissymétrique à droite : la majorité des probabilités est concentrée pour les petites valeurs de k (ici autour de 0 à 2).
- La somme des probabilités pour $k = 0$ à 20 est égale à 1.

Propriétés utiles

- $E(X) = np$
- $V(X) = npq$
- Si n est grand et p petit (avec $np < 10$), X peut être approchée par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$.

Valeurs numériques des premières probabilités

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(X = k)$	0,1900	0,3296	0,2824	0,1298	0,0468	0,0147	0,0034	0,0005	0,00005
$P(X \leq k)$	0,1900	0,5196	0,8020	0,9318	0,9786	0,9933	0,9967	0,9972	0,9973

La loi binomiale modélise le nombre de succès obtenus lors de la répétition, à l'identique et de façon indépendante, d'une même épreuve à deux issues.

Schéma de Bernoulli

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire à deux issues : « succès » (probabilité p) et « échec » (probabilité $1-p$). Un schéma de Bernoulli est la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Loi binomiale

La variable aléatoire X égale au nombre de succès obtenus lors d'un schéma de Bernoulli à n épreuves, de paramètre p , suit la loi binomiale de paramètres n et p , notée $\mathcal{B}(n; p)$.

Reconnaître une situation binomiale

On reconnaît et on justifie qu'une situation relève de la loi binomiale en identifiant : la répétition d'épreuves identiques et indépendantes, chacune à deux issues, et la variable comptant le nombre de succès.

Calcul de probabilités

On calcule une probabilité dans le cadre de la loi binomiale ($P(X = k)$, $P(X \leq k)$, etc.) à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel ; aucune expression explicite de la loi binomiale n'est exigée.

Représentation graphique

On représente graphiquement la loi binomiale (diagramme en bâtons des probabilités $P(X=k)$ pour k de 0 à n) à l'aide d'un logiciel.

Exemple résolu

Énoncé

Un contrôle de réception porte sur des poteaux préfabriqués. On considère que, de façon indépendante, chaque poteau a une probabilité 0,08 de présenter un défaut. On prélève un échantillon de 20 poteaux.

1) Justifier que la variable X , égale au nombre de poteaux défectueux dans l'échantillon, suit une loi binomiale ; donner ses paramètres.

2) À l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel, on obtient $P(X = 0) \approx 0,1887$. Interpréter cette valeur.

Résolution

1) On répète 20 fois, de façon indépendante, une épreuve de Bernoulli à deux issues (« défectueux » avec probabilité 0,08, « conforme » avec probabilité 0,92). X compte le nombre de succès (poteaux défectueux) : X suit donc la loi binomiale $B(20 ; 0,08)$.

2) $P(X = 0) \approx 0,1887$ signifie qu'il y a environ 18,9 % de chances qu'aucun des 20 poteaux de l'échantillon ne soit défectueux.

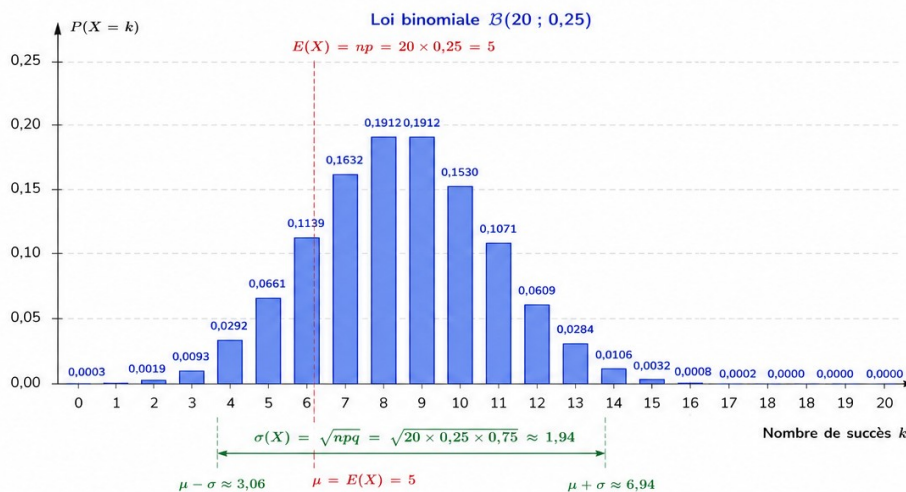
Applications métiers (Travaux Publics) : *Contrôle qualité de fabrication (bétons, enrobés, matériaux), fiabilité d'équipements de chantier, gestion des risques et des non-conformités.*

1F3 — Espérance, variance et écart type de la loi binomiale

1F3 — Espérance, variance et écart type de la loi binomiale

Soit $X \sim \mathcal{B}(n; p)$ avec n épreuves de Bernoulli indépendantes et p probabilité de succès.

Exemple : $X \sim \mathcal{B}(20; 0,25)$ (nombre de succès sur 20 essais, $p = 0,25$)



Formules générales (loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$)

• Espérance (moyenne) :

$$E(X) = np$$

• Variance :

$$V(X) = npq = np(1 - p)$$

• Écart type :

$$\sigma(X) = \sqrt{npq} = \sqrt{np(1 - p)}$$

où $q = 1 - p$.

Valeurs numériques (exemple)

- $n = 20$
- $p = 0,25$ (donc $q = 0,75$)
- $E(X) = np = 5$
- $V(X) = npq = 20 \times 0,25 \times 0,75 = 3,75$
- $\sigma(X) = \sqrt{3,75} \approx 1,94$

Lecture du graphique

- L'axe des abscisses donne le nombre de succès k (de 0 à n).
- L'axe des ordonnées donne la probabilité $P(X = k)$.
- La droite verticale rouge indique l'espérance $E(X) = np$.
- La distribution est centrée autour de $E(X)$.
- Environ 68 % des valeurs de X sont attendues dans l'intervalle $[E(X) - \sigma(X), E(X) + \sigma(X)]$ (propriété analogue à la loi normale pour n suffisamment grand).

Interprétation

Ici, en moyenne, on attend 5 succès sur 20 essais.
La variabilité autour de cette moyenne est mesurée par $\sigma(X) \approx 1,94$.
Il y a environ 68 % de chances d'obtenir entre 3 et 7 succès (bornes arrondies : 3,06 et 6,94).

Rappel : fonction de masse

Pour $k = 0, 1, \dots, n$:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

avec $q = 1 - p$.

L'espérance et l'écart type d'une loi binomiale renseignent respectivement sur le nombre moyen de succès attendu et sur la dispersion de ce nombre autour de la moyenne, sur un grand nombre de répétitions de l'expérience globale.

Formules (admisses)

Pour X suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$: $E(X) = n \times p$ (espérance) ; $V(X) = n \times p \times (1-p)$ (variance) ; $\sigma(X) = \sqrt{n \times p \times (1-p)}$ (écart type). Ces formules sont admises ; on peut les conforter expérimentalement à l'aide de simulations de la loi binomiale.

Interprétation

L'espérance $E(X) = np$ représente le nombre moyen de succès obtenu si l'on répète un grand nombre de fois l'expérience globale (les n épreuves). L'écart type mesure la dispersion typique du nombre de succès autour de cette moyenne.

Exemple résolu

Énoncé

On reprend X suivant la loi $\mathcal{B}(20; 0,08)$ (nombre de poteaux défectueux sur un échantillon de 20).

- 1) Calculer $E(X)$ et interpréter.
- 2) Calculer l'écart type $\sigma(X)$, arrondi à 10^{-2} près.

Résolution

- 1) $E(X) = n \times p = 20 \times 0,08 = 1,6$. Sur un grand nombre d'échantillons de 20 poteaux, on observerait en moyenne 1,6 poteau défectueux par échantillon.
- 2) $V(X) = n \times p \times (1-p) = 20 \times 0,08 \times 0,92 = 1,472$. $\sigma(X) = \sqrt{1,472} \approx 1,21$.

Applications métiers (Travaux Publics) : Contrôle qualité de fabrication (bétons, enrobés, matériaux), fiabilité d'équipements de chantier, gestion des risques et des non-conformités.

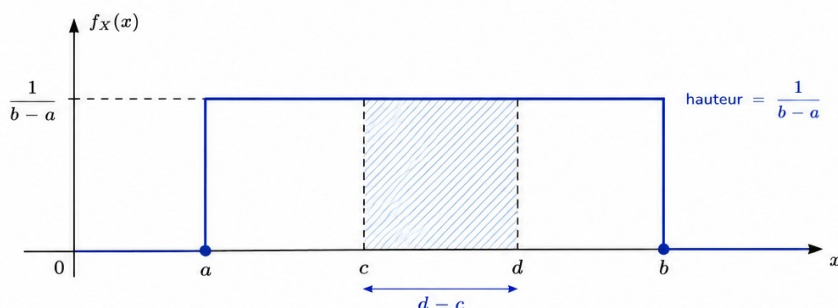
1F4 — Loi uniforme sur [a, b]

1F4 — Loi uniforme sur [a, b]

On dit que la variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[a, b]$ si sa densité est constante sur $[a, b]$ et nulle ailleurs.

Notation : $X \sim \mathcal{U}([a, b])$

Fonction de densité



Interprétation géométrique

Pour $a \leq c \leq d \leq b$,

$$P(c \leq X \leq d) = \text{aire du rectangle hachuré} = \frac{1}{b-a} \times (d-c) = \frac{d-c}{b-a}$$

La probabilité est proportionnelle à la longueur de l'intervalle $[c, d]$.

Définition

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $a < b$.

Fonction de répartition

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$

Espérance et variance

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\sigma(X) = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$$

Propriétés

- La densité est constante sur $[a, b]$: tous les sous-intervalles de même longueur ont la même probabilité.
- La probabilité d'un point est nulle : $P(X = c) = 0$ pour tout c .
- La loi uniforme modélise une situation d'équiprobabilité sur l'intervalle $[a, b]$.

Exemple numérique

Exemple : $X \sim \mathcal{U}([2, 7])$

Hauteur de la densité : $\frac{1}{7-2} = \frac{1}{5} = 0,2$

$$P(3 \leq X \leq 5) = \frac{5-3}{7-2} = \frac{2}{5} = 0,4$$

$$E(X) = \frac{2+7}{2} = 4,5$$

$$V(X) = \frac{(7-2)^2}{12} = \frac{25}{12} \approx 2,083$$

La loi uniforme continue modélise une variable aléatoire dont la valeur, comprise entre a et b , n'a a priori aucune raison de privilégier une zone plutôt qu'une autre de cet intervalle.

Définition

Une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[a, b]$ si, pour tout intervalle $[c, d]$ inclus dans $[a, b]$, $P(c \leq X \leq d) = (d-c)/(b-a)$: la probabilité ne dépend que de la longueur de l'intervalle considéré, pas de sa position.

Simulation

On peut concevoir une simulation de la loi uniforme sur $[0, 1]$ (fonction aléatoire disponible sur toute calculatrice ou tableur) puis, par transformation affine, obtenir une simulation de la loi uniforme sur tout intervalle $[a, b]$.

Espérance et écart type

Pour X suivant la loi uniforme sur $[a, b]$, $E(X) = (a+b)/2$ (milieu de l'intervalle) et l'écart type vaut $\sigma(X) = (b-a)/\sqrt{12}$. Ces résultats s'interprètent, comme pour la loi binomiale, dans le cadre d'un grand nombre de répétitions.

Exemple résolu

Énoncé

L'heure d'arrivée d'un camion de livraison de béton sur un chantier, exprimée en minutes de retard par rapport à l'horaire prévu, est modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur $[0, 30]$.

- Calculer la probabilité que le retard soit compris entre 10 et 20 minutes.
- Calculer l'espérance de X et interpréter.

Résolution

- $P(10 \leq X \leq 20) = (20-10)/(30-0) = 10/30 = 1/3 \approx 0,333$.
- $E(X) = (0+30)/2 = 15$. En moyenne, sur un grand nombre de livraisons, le retard est de 15 minutes.

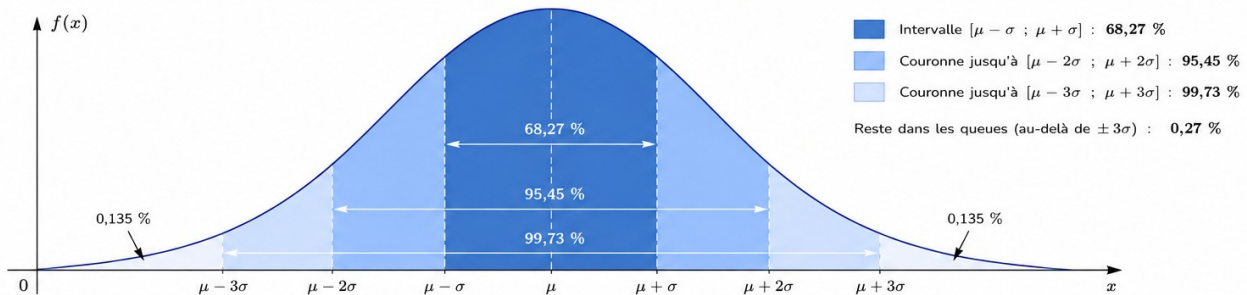
Applications métiers (Travaux Publics) : Contrôle qualité de fabrication (bétons, enrobés, matériaux), fiabilité d'équipements de chantier, gestion des risques et des non-conformités.

1F5 — Loi normale ; approche graphique et calcul de probabilités

1F5 — Loi normale ; approche graphique et calcul de probabilités

Si $X \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma)$ (loi normale de moyenne μ et d'écart type σ), sa fonction de densité est :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$



Interprétation

- La loi normale est symétrique autour de μ (moyenne = médiane = mode).
- Environ 68 % des valeurs sont à moins d'un écart type de la moyenne.
- Environ 95 % des valeurs sont à moins de deux écarts types de la moyenne.
- Environ 99,7 % des valeurs sont à moins de trois écarts types de la moyenne.
- Seulement 0,27 % des valeurs se trouvent en dehors de $[\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma]$.
- Plus σ est grand, plus la courbe est étalée ; plus σ est petit, plus elle est resserrée.

Calculs de probabilités (standardisation)

Si $X \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma)$, pour tout $a < b$:

$$P(a \leq X \leq b) = P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b - \mu}{\sigma}\right)$$

où $Z \sim \mathcal{N}(0; 1)$ (loi normale centrée réduite).

On utilise la table ou la calculatrice pour $P(Z \leq z)$.

Exemple numérique

Soit $X \sim \mathcal{N}(\mu = 50, \sigma = 10)$.

- $P(40 \leq X \leq 60) = P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 68,27 \%$
- $P(30 \leq X \leq 70) = P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 95,45 \%$
- $P(20 \leq X \leq 80) = P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 99,73 \%$
- $P(X < 20) = P(X > 80) \approx 0,135 \%$ chacun

Exemples de calculs

- $P(45 \leq X \leq 55) = P\left(\frac{45 - 50}{10} \leq Z \leq \frac{55 - 50}{10}\right) = P(-0,5 \leq Z \leq 0,5)$
 $= P(Z \leq 0,5) - P(Z \leq -0,5) \approx 0,69332 - 0,3085 = 0,38482$
soit environ 38,48 %.
- $P(X \leq 55) = P\left(Z \leq \frac{55 - 50}{10}\right) = P(Z \leq 0,5) \approx 0,69332$
soit environ 69,33 %.

Rappel : propriétés

- Si $X \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma)$ alors $aX + b \sim \mathcal{N}(a\mu + b, |a|\sigma)$ pour tout $a \neq 0, b \in \mathbb{R}$.
- Somme de normales indépendantes : si $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ indépendantes, alors $X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.
- Approximation : si $X \sim \mathcal{B}(n; p)$ avec $np(1-p) \geq 10$, alors X est bien approchée par $\mathcal{N}(np, np(1-p))$.

La loi normale est la loi de probabilité continue la plus utilisée pour modéliser des grandeurs mesurées sujettes à de multiples petites causes de variation aléatoire ; elle joue un rôle central en contrôle qualité.

Loi normale

Une variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance μ et d'écart type σ (notée $\mathcal{N}(\mu; \sigma)$) si sa fonction de densité a une courbe en forme de cloche, symétrique par rapport à μ . On introduit cette loi à partir de l'observation, à l'aide d'un logiciel, du cumul de nombreuses réalisations d'une expérience aléatoire uniforme.

Valeurs approchées usuelles

Pour X suivant $\mathcal{N}(\mu; \sigma)$:

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,68 ;$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,95 ;$$

$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,997.$$

Ces valeurs, à connaître et à interpréter graphiquement, sont à la base de la maîtrise statistique des processus (cartes de contrôle).

Calcul de probabilités

On utilise une calculatrice ou un tableur pour calculer toute probabilité dans le cadre de la loi normale (l'usage d'une table de la loi normale centrée réduite n'est pas une nécessité).

Exemple résolu

Énoncé

La résistance à la compression d'un béton, à 28 jours, est modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu = 30$ MPa et d'écart type $\sigma = 2$ MPa.

Donner, sans calculatrice, une valeur approchée de la probabilité que la résistance soit comprise entre 26 et 34 MPa.

Résolution

$$26 = 30 - 2 \times 2 = \mu - 2\sigma \text{ et } 34 = 30 + 2 \times 2 = \mu + 2\sigma.$$

On cherche donc $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma)$, dont la valeur approchée usuelle est 0,95.

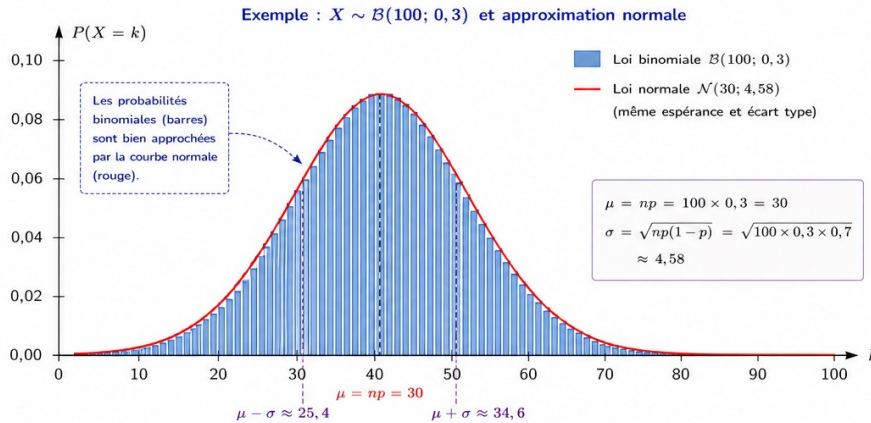
La probabilité que la résistance soit comprise entre 26 et 34 MPa est donc d'environ 95 %.

Applications métiers (Travaux Publics) : *Contrôle qualité de fabrication (bétons, enrobés, matériaux), fiabilité d'équipements de chantier, gestion des risques et des non-conformités.*

1F6 — Approximation d'une loi binomiale par une loi normale ; somme de variables indépendantes ; théorème de la limite centrée

1F6 — Approximation d'une loi binomiale par une loi normale ; somme de variables indépendantes ; théorème de la limite centrée

Si $X \sim \mathcal{B}(n; p)$ avec n grand et p non extrême ($np(1-p) \geq 10$), alors X peut être approchée par une loi normale $\mathcal{N}(\mu = np, \sigma = \sqrt{np(1-p)})$.



Conditions d'utilisation de l'approximation $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{N}$

- n grand et p non extrême (règle pratique : $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$, soit $np(1-p) \geq 10$).
- Plus n est grand, meilleure est l'approximation (forme en cloche symétrique).
- La normale est continue, la binomiale discrète : d'où l'importance de la correction de continuité.

Idee intuitive

La binomiale est la somme de n variables de Bernoulli indépendantes (0-1). Quand n est grand, cette somme a une distribution proche d'une loi normale (TLC).

$$\text{Bernoulli} + \text{Bernoulli} + \dots + \text{Bernoulli} = \text{Binomiale}(n, p) \approx \text{Normale}(np, np(1-p))$$

Exemple de calcul avec correction de continuité

Calculer $P(25 \leq X \leq 35)$ pour $X \sim \mathcal{B}(100; 0,3)$.

$$\mu = 30, \sigma \approx 4,58$$

$$P(25 \leq X \leq 35) \approx P(24,5 \leq Y \leq 35,5) \text{ avec } Y \sim \mathcal{N}(30; 4,58).$$

$$Z_1 = \frac{24,5 - 30}{4,58} \approx -1,20, \quad Z_2 = \frac{35,5 - 30}{4,58} \approx 1,20$$

$$\text{Donc } P(25 \leq X \leq 35) \approx P(-1,20 \leq Z \leq 1,20) \approx 0,769 \text{ (table normale).}$$

1) Approximation binomiale $\rightarrow$ normale

Si $X \sim \mathcal{B}(n; p)$ avec $np(1-p) \geq 10$, alors $X \approx \mathcal{N}(np, np(1-p))$.

Pour améliorer l'approximation des probabilités sur des intervalles entiers, on utilise la correction de continuité :
 $P(a \leq X \leq b) \approx P(a - 0,5 \leq Y \leq b + 0,5)$
avec $Y \sim \mathcal{N}(np, np(1-p))$.

2) Somme de variables indépendantes

Si $X_1, X_2, \dots, X_m$ sont indépendantes, avec $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$, alors

$$S = X_1 + X_2 + \dots + X_m \sim \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^m \mu_i, \sum_{i=1}^m \sigma_i^2\right).$$

3) Théorème de la limite centrée (TLC)

Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$ i.i.d. de moyenne μ et d'écart type σ (avec $\sigma^2 < \infty$). Alors, lorsque n est grand,

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

$$(\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i).$$

Lorsque le nombre d'épreuves est grand, la loi binomiale, discrète, peut être approchée par la loi normale, continue, ce qui simplifie considérablement les calculs de probabilités ; ce résultat s'inscrit dans le cadre plus général du théorème de la limite centrée.

Approximation loi binomiale $\rightarrow$ loi normale

Si X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ avec n grand, on peut approcher la loi de X par la loi normale de mêmes espérance et écart type, c'est-à-dire $\mathcal{N}(np; \sqrt{np(1-p)})$. Les conditions précises de validité de cette approximation ne sont pas exigibles ; une correction de continuité peut être nécessaire, les indications étant alors fournies.

Lois de $aX+b$, $X+Y$, $X-Y$

Pour X et Y deux variables aléatoires indépendantes et a, b des réels, on sait déterminer les paramètres (espérance, variance) des lois de $aX+b$, $X+Y$ et $X-Y$; ces résultats sont conjecturés à l'aide de simulations, puis admis.

Théorème de la limite centrée

Ce théorème (admis) énonce que la moyenne (ou la somme) de n variables aléatoires indépendantes de même loi, d'espérance μ et d'écart type σ , suit approximativement, pour n grand, une loi normale — pour la moyenne : $\mathcal{N}(\mu; \sigma/\sqrt{n})$. L'outil informatique permet une approche expérimentale de ce résultat.

Exemple résolu

Énoncé

Une chaîne de fabrication de parpaings produit des pièces dont la masse suit une loi d'espérance $\mu = 18$ kg et d'écart type $\sigma = 0,6$ kg. On prélève un échantillon de $n = 36$ parpaings et on note $\bar{X}$ leur masse moyenne.

D'après le théorème de la limite centrée, quelle loi peut-on utiliser pour approcher celle de $\bar{X}$? Donner ses paramètres.

Résolution

D'après le théorème de la limite centrée, pour $n = 36$ (grand), la moyenne $\bar{X}$ suit approximativement la loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma/\sqrt{n})$.

$$\mu = 18 \text{ kg. } \sigma/\sqrt{n} = 0,6/\sqrt{36} = 0,6/6 = 0,1 \text{ kg.}$$

On peut donc approcher la loi de $\bar{X}$ par la loi normale $N(18 ; 0,1)$.

Applications métiers (Travaux Publics) : *Contrôle qualité de fabrication (bétons, enrobés, matériaux), fiabilité d'équipements de chantier, gestion des risques et des non-conformités.*

Exercices d'application

Ex. F1 — Contrôle de conformité de bordures préfabriquées

Énoncé

Dans une production de bordures préfabriquées, on estime que 6 % des pièces présentent un défaut d'aspect. On prélève au hasard, de façon indépendante, un échantillon de 15 bordures. On note X le nombre de bordures défectueuses dans l'échantillon.

- 1) Justifier que X suit une loi binomiale et donner ses paramètres.
- 2) Calculer $E(X)$ et interpréter.
- 3) Un logiciel donne $P(X \leq 1) \approx 0,7738$. Calculer $P(X \geq 2)$ et interpréter.

Corrigé

- 1) On répète 15 fois, de façon indépendante, une épreuve de Bernoulli à deux issues (défectueuse, probabilité 0,06 ; conforme, probabilité 0,94). X compte le nombre de succès : X suit la loi binomiale $B(15 ; 0,06)$.
- 2) $E(X) = np = 15 \times 0,06 = 0,9$. En moyenne, sur un grand nombre d'échantillons de 15 bordures, on observerait 0,9 bordure défectueuse par échantillon.
- 3) $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - 0,7738 = 0,2262$. Il y a environ 22,6 % de chances d'observer au moins 2 bordures défectueuses dans un échantillon de 15.

Ex. F2 — Résistance d'un lot de parpaings

Énoncé

La résistance à la compression d'un parpaing, en MPa, suit une loi normale d'espérance $\mu = 12$ MPa et d'écart type $\sigma = 1,5$ MPa. La norme impose une résistance minimale de 9 MPa.

- 1) Exprimer 9 en fonction de μ et σ (sous la forme $\mu - k\sigma$).
- 2) En déduire une valeur approchée de la probabilité qu'un parpaing pris au hasard ait une résistance inférieure à 9 MPa, sachant que $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,95$.

Corrigé

- 1) $\mu - 2\sigma = 12 - 2 \times 1,5 = 12 - 3 = 9$. Donc $9 = \mu - 2\sigma$.
 - 2) $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,95$, donc $P(X < \mu - 2\sigma \text{ ou } X > \mu + 2\sigma) \approx 1 - 0,95 = 0,05$. Par symétrie de la loi normale, $P(X < \mu - 2\sigma) \approx 0,05/2 = 0,025$.
- La probabilité qu'un parpaing ait une résistance inférieure à 9 MPa (donc non conforme) est d'environ 2,5 %.

Évaluation de fin de module (QCM)

Question 1. Pour reconnaître qu'une situation relève de la loi binomiale, il faut identifier :

A. Une seule épreuve à trois issues

B. La répétition d'épreuves identiques et indépendantes, à deux issues chacune ✓ (réponse correcte)

C. Une variable continue à densité

D. Un phénomène sans aucun aléa

Explication : La loi binomiale modélise le nombre de succès d'un schéma de Bernoulli : répétition d'épreuves identiques, indépendantes, à deux issues.

Question 2. Pour X suivant la loi binomiale $B(n ; p)$, l'espérance $E(X)$ vaut :

A. $n + p$

B. $n \times p$ ✓ (réponse correcte)

C. n / p

D. $p \times (1-p)$

Explication : L'espérance de la loi binomiale $B(n ; p)$ est $E(X) = n \times p$.

Question 3. Pour une variable X suivant la loi normale $N(\mu ; \sigma)$, la probabilité $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma)$ vaut approximativement :

A. 0,68

B. 0,95 ✓ (réponse correcte)

C. 0,997

D. 0,50

Explication : $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,95$, valeur usuelle à connaître pour la loi normale.

Question 4. Le théorème de la limite centrée permet d'approcher la loi de la moyenne de n variables indépendantes de même loi, pour n grand, par :

A. Une loi binomiale

B. Une loi uniforme

C. Une loi normale ✓ (réponse correcte)

D. Une loi de Poisson

Explication : Le théorème de la limite centrée énonce que la moyenne (ou la somme) de n variables indépendantes de même loi suit approximativement, pour n grand, une loi normale.

Question 5. Pour X suivant la loi uniforme sur $[a ; b]$, la probabilité $P(c \leq X \leq d)$, avec $[c;d] \subset [a;b]$, dépend :

A. De la position de $[c ; d]$ dans $[a ; b]$

B. Uniquement de la longueur de $[c ; d]$ ✓ (réponse correcte)

C. De la valeur de a uniquement

D. Du carré de $(d - c)$

Explication : Pour la loi uniforme, la probabilité ne dépend que de la longueur $(d - c)$ de l'intervalle, pas de sa position dans $[a ; b]$.

Module G — Probabilités 2

2ème année

Notions du module

Code	Notion	Durée (h)
2G1	Loi exponentielle	2
2G2	Loi de Poisson ; approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson	2
2G3	Processus aléatoires : graphes probabilistes, chaînes de Markov	2

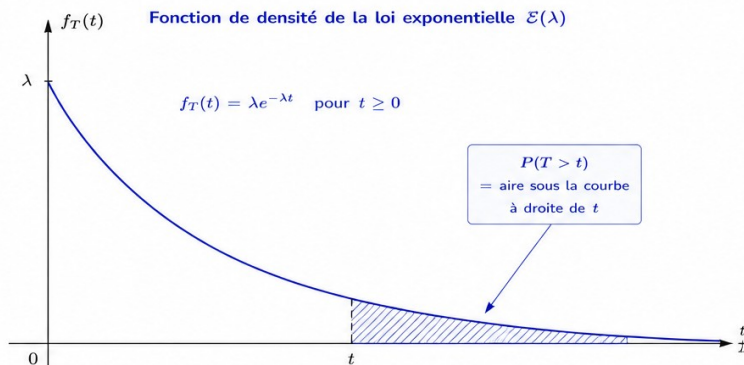
2G1 — Loi exponentielle

2G1 — Loi exponentielle

Durée de fonctionnement sans panne, loi exponentielle

Soit T la durée de fonctionnement d'un équipement sans panne.

On modélise T par une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$: $T \sim \mathcal{E}(\lambda)$.



Loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$

• Densité :

$$f_T(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

• Fonction de répartition :

$$F_T(t) = P(T \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

• Probabilité de survie (pas de panne au-delà de t) :

$$P(T > t) = 1 - F_T(t) = e^{-\lambda t} \text{ pour } t \geq 0$$

• Espérance et variance :

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} ; \quad V(T) = \frac{1}{\lambda^2} ; \quad \sigma(T) = \frac{1}{\lambda}$$

Interprétation

- $f_T(0) = \lambda$ est la valeur maximale de la densité : une panne peut survenir dès le début.
- La densité décroît exponentiellement : plus le temps passe, plus la probabilité instantanée de panne diminue.
- $P(T > t) = e^{-\lambda t}$ est la probabilité que l'équipement fonctionne encore sans panne au-delà de l'instant t .
- $\frac{1}{\lambda}$ est le temps moyen de fonctionnement sans panne (MTTF : Mean Time To Failure).

Remarque

La loi exponentielle modélise des durées de vie sans vieillissement (propriété de « sans mémoire ») :

$$P(T > t + s | T > s) = P(T > t) \text{ pour tout } s, t \geq 0$$

Le passé n'influence pas l'avenir : seule la durée écoulée compte.

Exemple numérique

Soit $T \sim \mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda = 0,2 \text{ h}^{-1}$ (taux de panne de 0,2 par heure).

Ainsi, le temps moyen avant panne est $E(T) = \frac{1}{\lambda} = 5$ heures.

t (heures)	0	2	5	10
$P(T > t) = e^{-0,2t}$	1,000	0,670	0,368	0,135

Par exemple, $P(T > 5) \approx 36,8\%$: il y a 36,8 % de chances que l'équipement fonctionne encore sans panne au-delà de 5 heures.

La loi exponentielle modélise des durées de vie ou des temps d'attente avant un événement (panne, défaillance, désintégration), dans les situations où le phénomène ne présente pas d'effet d'usure (durée « sans mémoire »).

Définition

Une variable aléatoire T à valeurs dans $[0 ; +\infty[$ suit la loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$) si sa fonction de densité et sa fonction de répartition permettent de calculer, pour tout $t \geq 0$: $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

Simulation

On peut simuler la loi exponentielle à partir de la loi uniforme sur $[0 ; 1]$, en utilisant une transformation adaptée fournie par le logiciel.

Représentation et calcul de probabilités

On représente graphiquement la loi exponentielle (fonction de densité, fonction de répartition) et on calcule une probabilité ($P(T \leq t)$, $P(T > t)$, $P(a \leq T \leq b)$) à l'aide d'un logiciel ou d'une calculatrice.

Espérance et écart type

Pour T suivant la loi exponentielle de paramètre λ : $E(T) = 1/\lambda$ et $\sigma(T) = 1/\lambda$ également. Ces valeurs s'interprètent dans le cadre d'un grand nombre de répétitions (durée de vie moyenne observée sur un grand nombre de composants).

Exemple résolu

Énoncé

La durée de fonctionnement, en années, d'un compresseur de chantier avant sa première panne est modélisée par une variable aléatoire T suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,1$.

- 1) Calculer l'espérance de T et interpréter.
- 2) Calculer $P(T \leq 5)$, arrondie à 10^{-3} près.

Résolution

- 1) $E(T) = 1/\lambda = 1/0,1 = 10$ ans. La durée de vie moyenne du compresseur, sur un grand nombre de compresseurs identiques, est de 10 ans.
- 2) $P(T \leq 5) = 1 - e^{-\lambda \cdot 5} = 1 - e^{-0,5} \approx 1 - 0,6065 \approx 0,393$.

Il y a environ 39,3 % de chances que le compresseur tombe en panne avant 5 ans.

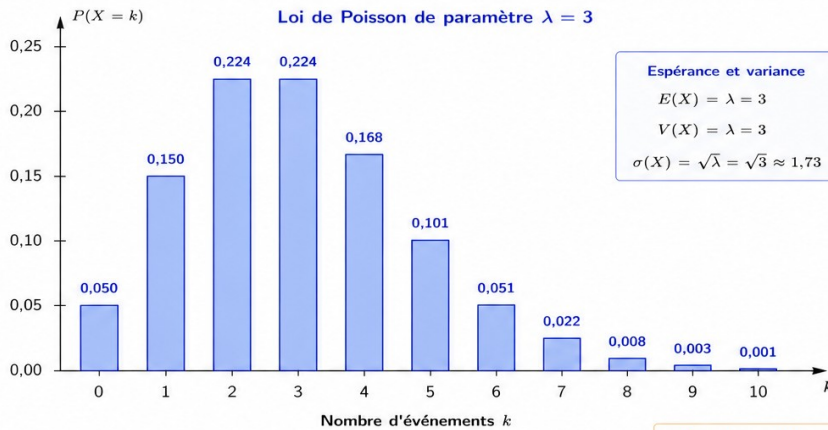
Applications métiers (Travaux Publics) : *Fiabilité d'équipements et de matériaux de chantier, gestion de stocks et de réseaux (approvisionnement, logistique de chantier), pertinence d'un réseau ou d'un plan de circulation.*

2G2 — Loi de Poisson ; approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

2G2 — Loi de Poisson ; approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

Pour modéliser le nombre d'événements rares sur un intervalle de temps ou d'espace.

Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ (loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$), alors $P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ pour $k = 0, 1, 2, \dots$



Loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$

• Fonction de probabilité :

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \text{ pour } k = 0, 1, 2, \dots$$

• Fonction de répartition :

$$F(k) = P(X \leq k) = \sum_{i=0}^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} \text{ pour } k = 0, 1, 2, \dots$$

• Propriétés :

- X ne prend que des valeurs entières (0, 1, 2, ...).
- $P(X = k + 1) = P(X = k) \frac{\lambda}{k + 1}$ (récurrence pratique).
- Moyenne, variance et écart type : $E(X) = V(X) = \lambda$ et $\sigma(X) = \sqrt{\lambda}$.
- Si λ est petit : forte probabilité pour les petites valeurs de k .
- La distribution est asymétrique (queue à droite).

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ avec n grand et p petit, et si $\lambda = np$ est modéré (en général $\lambda = np \leq 10$), alors X peut être approximée par une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$:

$$\mathcal{B}(n, p) \approx \mathcal{P}(\lambda) \text{ avec } \lambda = np$$

Conditions usuelles : $n \geq 50$ et $p \leq 0,1$ (ou plus généralement $np \leq 10$).

Cette approximation simplifie les calculs de probabilités.

Exemples numériques pour $\lambda = 3$

- $P(X = 0) = e^{-3} \frac{3^0}{0!} = 0,050$
- $P(X = 1) = e^{-3} \frac{3^1}{1!} = 0,150$
- $P(X = 2) = e^{-3} \frac{3^2}{2!} = 0,224$
- $P(X = 3) = e^{-3} \frac{3^3}{3!} = 0,224$
- $P(X = 4) = e^{-3} \frac{3^4}{4!} = 0,168$
- $P(X = 5) = e^{-3} \frac{3^5}{5!} = 0,101$
- $P(X = 6) = e^{-3} \frac{3^6}{6!} = 0,051$
- $P(X = 7) = e^{-3} \frac{3^7}{7!} = 0,022$
- $P(X = 8) = e^{-3} \frac{3^8}{8!} = 0,008$
- $P(X = 9) = e^{-3} \frac{3^9}{9!} = 0,003$
- $P(X = 10) = e^{-3} \frac{3^{10}}{10!} = 0,001$

Vérification : la somme des probabilités pour $k = 0$ à 10 vaut $\approx 0,9999$ (arrondi).

La loi de Poisson modélise le nombre d'occurrences d'un événement rare pendant un intervalle de temps ou d'espace donné (nombre de pannes par mois, nombre de défauts par lot), lorsque le temps d'attente entre deux occurrences suit une loi exponentielle.

Origine de la loi

La loi de Poisson est introduite comme correspondant au nombre de réalisations observées durant un intervalle de temps de longueur donnée, lorsque le temps d'attente entre deux réalisations successives suit une loi exponentielle. Aucune expression explicite de la loi de Poisson n'est exigée.

Représentation et calcul de probabilités

On représente graphiquement la loi de Poisson et on calcule une probabilité ($P(X = k)$, $P(X \leq k)$) à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel, le paramètre de la loi étant le nombre moyen d'occurrences sur l'intervalle considéré.

Esperance et écart type

Pour X suivant la loi de Poisson de paramètre λ (nombre moyen d'occurrences) : $E(X) = \lambda$ et $V(X) = \lambda$, donc $\sigma(X) = \sqrt{\lambda}$. Ces valeurs s'interprètent dans le cadre d'un grand nombre de répétitions.

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

Lorsque n est grand et p petit (épreuve rare répétée un grand nombre de fois), on peut approcher la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$. Les conditions précises de validité ne sont pas exigibles ; on illustre cette approximation à l'aide de l'outil informatique.

Exemple résolu

Énoncé

Le nombre de non-conformités relevées chaque semaine lors du contrôle qualité d'une centrale à béton suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 3$.

- 1) Calculer l'espérance et l'écart type du nombre de non-conformités hebdomadaires.
- 2) Un logiciel donne $P(X = 0) \approx 0,0498$. Interpréter cette valeur.

Résolution

1) $E(X) = \lambda = 3$ non-conformités par semaine en moyenne. $\sigma(X) = \sqrt{\lambda} = \sqrt{3} \approx 1,73$.

2) $P(X = 0) \approx 0,0498$ signifie qu'il y a environ 5 % de chances qu'aucune non-conformité ne soit relevée au cours d'une semaine donnée.

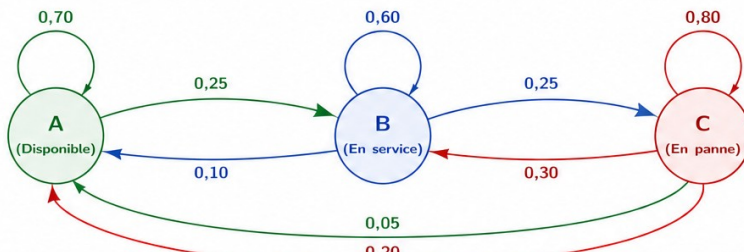
Applications métiers (Travaux Publics) : *Fiabilité d'équipements et de matériaux de chantier, gestion de stocks et de réseaux (approvisionnement, logistique de chantier), pertinence d'un réseau ou d'un plan de circulation.*

2G3 — Processus aléatoires : graphes probabilistes, chaînes de Markov

2G3 — Processus aléatoires : graphes probabilistes, chaînes de Markov

Un système évolue au cours du temps parmi un ensemble d'états.
Les transitions entre états sont aléatoires et ne dépendent que de l'état actuel (propriété de **Markov**).
Les probabilités de transition sont indiquées sur les flèches.

Graphe probabiliste (chaîne de Markov à 3 états)



Chaque nombre représente la probabilité de transition d'un état de départ (origine) vers l'état d'arrivée (extrémité de la flèche).

Interprétation

- Les sommets représentent les états possibles du système.
- Une flèche de i vers j étiquetée p_{ij} indique $P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = p_{ij}$.
- Une boucle sur un sommet i représente la probabilité de rester dans le même état : p_{ii} .
- Pour chaque état i , la somme des probabilités de transition sortantes vaut 1 :

$$\sum_j p_{ij} = 1.$$

Ici : A = Disponible, B = En service, C = En panne

Matrice de transition P
(lignes : état de départ, colonnes : état d'arrivée)

	A	B	C
A (Disponible)	0,70	0,25	0,05
B (En service)	0,10	0,60	0,30
C (En panne)	0,20	0,30	0,80

Chaque ligne somme à 1.

Cette matrice permet de calculer les probabilités à l'étape suivante :

si π_n est le vecteur-ligne des probabilités à l'étape n , alors $\pi_{n+1} = \pi_n P$.

Exemple d'utilisation

Supposons qu'au départ le système est disponible :

$$\pi_0 = (1, 0, 0).$$

Distribution à l'étape suivante :

$$\pi_1 = \pi_0 P = (1, 0, 0) \begin{pmatrix} 0,70 & 0,25 & 0,05 \\ 0,10 & 0,60 & 0,30 \\ 0,20 & 0,30 & 0,80 \end{pmatrix} = (0,70, 0,25, 0,05).$$

Après une étape, il y a 70 % de chances que le système soit disponible, 25 % en service et 5 % en panne.

Évolution à long terme (état stationnaire)

La distribution stationnaire π vérifie : $\pi = \pi P$ et $\sum_i \pi_i = 1$.

Pour ce système, la distribution stationnaire est :

$$\pi \approx (0,364 ; 0,455 ; 0,182)$$

Disponible En service En panne

À long terme, le système est en moyenne :

- 36,4 % du temps disponible,
- 45,5 % du temps en service,
- 18,2 % du temps en panne.

Un graphe probabiliste modélise l'évolution d'un système passant d'un état à un autre, chaque transition étant affectée d'une probabilité ; il permet d'étudier des marches aléatoires et des comportements sur le long terme.

Graphe probabiliste

Un graphe probabiliste à N sommets est un graphe orienté et pondéré dont les sommets représentent les états possibles d'un système, et dont les arêtes, munies d'une probabilité, représentent les transitions possibles d'un état à l'autre ; en chaque sommet, la somme des probabilités des arêtes sortantes vaut 1.

Chaîne de Markov

Une chaîne de Markov est un processus aléatoire dans lequel l'état futur ne dépend que de l'état présent (et non des états antérieurs). On étudie ici quelques exemples sur des graphes à un petit nombre de sommets.

Calcul de la probabilité d'un parcours

On exploite un graphe probabiliste pour calculer la probabilité d'un parcours donné, en multipliant les probabilités des transitions successives (principe analogue à celui de l'arbre pondéré).

Simulation

On simule un processus aléatoire simple (marche aléatoire sur un graphe à quelques sommets) et on exploite la simulation pour estimer une probabilité, une durée moyenne, ou conjecturer un comportement asymptotique (état stable atteint après un grand nombre d'étapes).

Exemple résolu

Énoncé

Un géo-radar de détection de réseaux enterrés peut être, à chaque relevé, dans l'état « signal fiable » (F) ou « signal perturbé » (P). On observe que, d'un relevé au suivant : si l'état est F, il reste F avec une probabilité 0,9 (et passe à P avec une probabilité 0,1) ; si l'état est P, il repasse à F avec une probabilité 0,6 (et reste P avec une probabilité 0,4).

Le premier relevé est fiable (état F). Calculer la probabilité que les deux relevés suivants soient également fiables (F puis F).

Résolution

On construit l'arbre à partir de l'état initial F : la probabilité de rester en F au relevé suivant est 0,9, puis à nouveau 0,9 pour rester en F au relevé d'après.

$$P(F \rightarrow F \rightarrow F) = 0,9 \times 0,9 = 0,81.$$

La probabilité que les deux relevés suivants soient fiables est de 0,81, soit 81 %.

Applications métiers (Travaux Publics) : *Fiabilité d'équipements et de matériaux de chantier, gestion de stocks et de réseaux (approvisionnement, logistique de chantier), pertinence d'un réseau ou d'un plan de circulation.*

Exercices d'application

Ex. G1 — Fiabilité d'une pompe de forage

Énoncé

La durée de fonctionnement, en mois, d'une pompe de forage avant sa première panne suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,05$.

- 1) Calculer l'espérance de vie de la pompe.
- 2) Calculer la probabilité que la pompe fonctionne plus de 24 mois sans panne, arrondie à 10^{-3} près (on rappelle $P(T > t) = e^{(-\lambda t)}$).

Corrigé

1) $E(T) = 1/\lambda = 1/0,05 = 20$ mois.

2) $P(T > 24) = e^{(-0,05 \times 24)} = e^{(-1,2)} \approx 0,301$.

La probabilité que la pompe fonctionne plus de 24 mois sans panne est d'environ 30,1 %.

Ex. G2 — Incidents sur un chantier

Énoncé

Le nombre d'incidents mineurs de sécurité relevés chaque mois sur un grand chantier suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 2$.

- 1) Calculer l'écart type du nombre d'incidents mensuels.
- 2) Un logiciel donne $P(X \leq 1) \approx 0,4060$. En déduire $P(X \geq 2)$ et interpréter dans le contexte de la prévention des risques.

Corrigé

1) $\sigma(X) = \sqrt{\lambda} = \sqrt{2} \approx 1,41$.

2) $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - 0,4060 = 0,5940$.

Il y a environ 59,4 % de chances qu'au moins 2 incidents mineurs surviennent sur le chantier un mois donné : cette information oriente la fréquence des actions de prévention à mettre en place.

Évaluation de fin de module (QCM)

Question 1. La loi exponentielle est particulièrement adaptée pour modéliser :

- A. Un caractère qualitatif à plusieurs catégories
- B. Une durée de vie ou un temps d'attente avant un événement ✓ (réponse correcte)**
- C. Le nombre d'individus d'une population
- D. Une proportion entre 0 et 1

Explication : La loi exponentielle modélise des durées de vie ou des temps d'attente avant une panne ou un événement.

Question 2. Pour T suivant la loi exponentielle de paramètre λ , l'espérance $E(T)$ vaut :

- A. λ
- B. $1/\lambda$ ✓ (réponse correcte)**
- C. λ^2
- D. $\sqrt{\lambda}$

Explication : L'espérance de la loi exponentielle de paramètre λ est $E(T) = 1/\lambda$.

Question 3. La loi de Poisson correspond au nombre de réalisations observées durant un intervalle de temps donné, lorsque le temps d'attente entre deux réalisations suit :

- A. Une loi normale
- B. Une loi binomiale
- C. Une loi exponentielle ✓ (réponse correcte)**
- D. Une loi uniforme

Explication : La loi de Poisson est introduite comme le nombre de réalisations observées lorsque le temps d'attente entre deux réalisations suit une loi exponentielle.

Question 4. Un graphe probabiliste à N sommets est utilisé pour représenter :

- A. Une série statistique à deux variables
- B. Un processus aléatoire évoluant entre plusieurs états ✓ (réponse correcte)**
- C. Une fonction continue
- D. Une matrice inverse

Explication : Un graphe probabiliste modélise les transitions, affectées de probabilités, entre les différents états possibles d'un système.

Question 5. Dans un graphe probabiliste, la somme des probabilités des arêtes sortant d'un même sommet doit être égale à :

- A. 0
- B. 0,5
- C. 1 ✓ (réponse correcte)**
- D. Cela dépend du sommet

Explication : En chaque sommet, la somme des probabilités des transitions sortantes vaut 1 (on est certain de passer dans l'un des états possibles).

Module H — Statistique inférentielle

2ème année

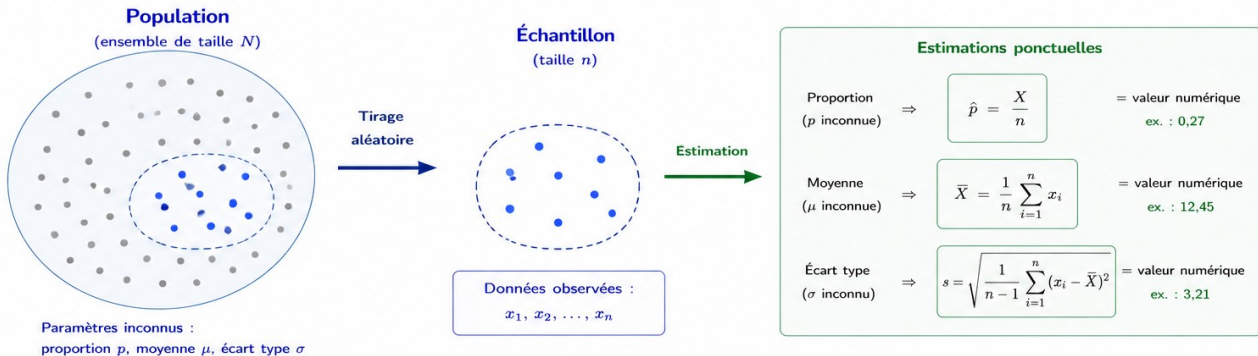
Notions du module

Code	Notion	Durée (h)
2H1	Estimation ponctuelle d'une proportion, d'une moyenne, d'un écart type	1
2H2	Tests d'hypothèse : région de rejet, règle de décision	2
2H3	Comparaison de deux proportions ou deux moyennes ; risques d'erreur	2
2H4	Estimation par intervalle de confiance	2

2H1 — Estimation ponctuelle d'une proportion, d'une moyenne, d'un écart type

2H1 — Estimation ponctuelle d'une proportion, d'une moyenne, d'un écart type

On cherche à estimer (par un nombre) un paramètre inconnu de la population à partir d'un échantillon aléatoire.
L'estimateur est une statistique calculée sur l'échantillon et notée avec un "chapeau" ($\hat{\cdot}$).



Récapitulatif des estimateurs usuels

- Proportion d'individus possédant une caractéristique (variable qualitative) : $\hat{p} = \frac{X}{n}$ où X = nombre de succès observés
 n = taille de l'échantillon
- Moyenne d'une variable quantitative : $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ où x_i = i -ième observation
 n = taille de l'échantillon
- Écart type (échantillonnal) : $s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}$ (estimateur sans biais de σ sous hypothèse normale)



Remarque : Ces estimateurs sont des valeurs calculées sur l'échantillon : ils varient d'un échantillon à l'autre. On parle d'estimation ponctuelle car on donne un seul nombre pour estimer le paramètre inconnu de la population.

L'estimation ponctuelle consiste à attribuer, à un paramètre inconnu d'une population (proportion, moyenne, écart type), une valeur unique calculée à partir des données d'un échantillon.

Principe

Face à une population dont on ne connaît pas exactement un paramètre (proportion p d'éléments possédant un caractère, moyenne μ ou écart type σ d'une grandeur), on prélève un échantillon représentatif et on calcule, à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel, la proportion, la moyenne ou l'écart type observés sur cet échantillon, utilisés comme estimation ponctuelle du paramètre de la population.

Choix de l'estimation de l'écart type

La simulation de nombreux échantillons permet de sensibiliser au choix de l'estimateur de l'écart type de la population à partir d'un échantillon (l'écart type calculé directement sur l'échantillon sous-estime en moyenne l'écart type de la population, ce que corrige un estimateur adapté, fourni par le logiciel utilisé).

Exemple résolu

Énoncé

Sur un échantillon de 150 éprouvettes de béton prélevées lors d'une campagne de contrôle, 12 se révèlent non conformes.

Donner une estimation ponctuelle de la proportion d'éprouvettes non conformes dans l'ensemble de la production.

Résolution

La fréquence observée sur l'échantillon est $f = 12/150 = 0,08$.

L'estimation ponctuelle de la proportion p d'éprouvettes non conformes dans la population est donc $p \approx 0,08$, soit 8 %.

Applications métiers (Travaux Publics) : Maîtrise statistique des procédés de fabrication (bétons, enrobés), contrôle qualité de réception de matériaux, incertitude de mesure sur chantier.

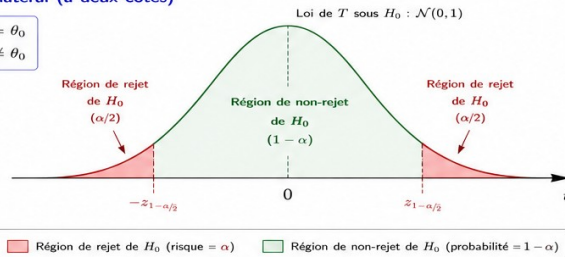
2H2 — Tests d'hypothèse : région de rejet, règle de décision

2H2 — Tests d'hypothèse : région de rejet, règle de décision

On teste une hypothèse nulle H_0 sur un paramètre inconnu d'une population à l'aide d'une statistique test T dont la loi (sous H_0) est approximée par une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.
On fixe un risque de première espèce α (niveau de signification).

1) Test bilatéral (à deux côtés)

$$H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta \neq \theta_0$$



Règle de décision

On calcule la valeur observée t_{obs} de T .

- Rejeter H_0 au niveau α si $|t_{obs}| \geq z_{1-\alpha/2}$
 - Ne pas rejeter H_0 sinon.
- où $z_{1-\alpha/2}$ est le quantile d'ordre $1 - \frac{\alpha}{2}$ de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Résumé général

- Poser les hypothèses H_0 et H_1 .
- Choisir le niveau de signification α (exceptionnellement 10 %, 5 % ou 1 %).
- Choisir la statistique test T et connaître (sa) loi sous H_0 ($\approx \mathcal{N}(0, 1)$).
- Déterminer la région de rejet de H_0 .
- Calculer la valeur observée t_{obs} de T .
- Décider : rejeter ou ne pas rejeter H_0 .

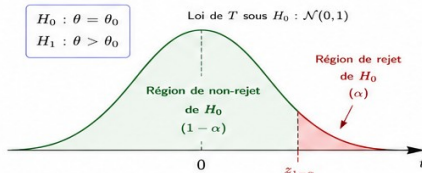
Définitions

- Région de rejet de H_0** : ensemble des valeurs de T qui conduisent à rejeter H_0 .
Sa probabilité sous H_0 est α .
- Erreurs possibles** :
 - Erreur de première espèce : rejeter H_0 alors qu'elle est vraie (probabilité α).
 - Erreur de deuxième espèce : ne pas rejeter H_0 alors qu'elle est fautive (probabilité β).La puissance du test est $1 - \beta$.

2) Tests unilatéraux (à un seul côté)

a) Test unilatéral à droite

$$H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta > \theta_0$$

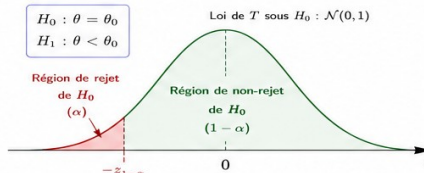


Règle de décision

- Rejeter H_0 au niveau α si $t_{obs} \geq z_{1-\alpha}$.
 - Ne pas rejeter H_0 sinon.
- où $z_{1-\alpha}$ est le quantile d'ordre $1 - \alpha$ de $\mathcal{N}(0, 1)$.

b) Test unilatéral à gauche

$$H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta < \theta_0$$



Règle de décision

- Rejeter H_0 au niveau α si $t_{obs} \leq -z_{1-\alpha}$.
 - Ne pas rejeter H_0 sinon.
- où $z_{1-\alpha}$ est le quantile d'ordre $1 - \alpha$ de $\mathcal{N}(0, 1)$.

Quantiles utiles de $\mathcal{N}(0, 1)$

α	0,10	0,05	0,01
$z_{1-\alpha/2}$ (bilatéral)	1,645	1,960	2,576
$z_{1-\alpha}$ (unilatéral)	1,282	1,645	2,326

Exemples :

- $\alpha = 5\%$ (bilatéral) $\Rightarrow$ seuils : $\pm 1,96$
- $\alpha = 5\%$ (unilatéral) $\Rightarrow$ seuil : 1,645



Idée clé : on compare la valeur observée de la statistique test t_{obs} aux seuils critiques délimitant la région de rejet.
Si t_{obs} tombe dans cette région (en rouge), on rejette H_0 ; sinon, on ne la rejette pas.

Un test d'hypothèse est une procédure statistique qui permet de décider, à partir des données d'un échantillon et avec un risque d'erreur maîtrisé, si une affirmation sur un paramètre de la population doit être rejetée ou non.

Principe d'un test d'hypothèse

On formule une hypothèse nulle H_0 sur un paramètre de la population (par exemple, une proportion ou une moyenne a une valeur donnée), que l'on confronte aux données observées sur un échantillon. Le test peut être bilatéral (on cherche un écart dans les deux sens) ou unilatéral (on cherche un écart dans un seul sens).

Région de rejet et règle de décision

On détermine, à un seuil de signification donné (souvent 5 %), une région de rejet de l'hypothèse nulle : si la valeur observée sur l'échantillon appartient à cette région, on rejette H_0 ; sinon, on ne la rejette pas. Cette démarche s'applique à des tests relatifs à une proportion (loi binomiale, ou loi binomiale approximable par une loi normale) ou à une moyenne.

Rôle des choix a priori

La décision (rejet ou non de H_0) dépend des choix faits a priori par l'utilisateur : hypothèse nulle retenue, type de test (bilatéral ou unilatéral), seuil de signification. Dans les cas délicats, ces choix sont fournis à l'étudiant.

Exemple résolu

Énoncé

Une centrale d'enrobés affirme que la teneur en bitume de ses enrobés est de 5,2 % en moyenne. Sur un échantillon prélevé, on souhaite tester, au seuil de 5 %, l'hypothèse nulle H_0 : « la teneur moyenne est de 5,2 % » contre l'hypothèse alternative H_1 : « la teneur moyenne est différente de 5,2 % ».

1) Ce test est-il bilatéral ou unilatéral ? Justifier.

2) Un logiciel fournit une région de rejet correspondant à une teneur moyenne observée en dehors de l'intervalle [5,05 % ; 5,35 %]. La teneur moyenne observée sur l'échantillon est de 5,42 %. Conclure.

Résolution

1) L'hypothèse alternative « différente de 5,2 % » ne privilégie pas un sens d'écart particulier (ni seulement supérieur, ni seulement inférieur) : le test est bilatéral.

2) La valeur observée 5,42 % n'appartient pas à l'intervalle [5,05 % ; 5,35 %] (elle est supérieure à 5,35 %) :

elle appartient donc à la région de rejet.

On rejette l'hypothèse nulle H_0 au seuil de 5 % : on considère que la teneur moyenne réelle en bitume diffère de 5,2 %.

Applications métiers (Travaux Publics) : *Maîtrise statistique des procédés de fabrication (bétons, enrobés), contrôle qualité de réception de matériaux, incertitude de mesure sur chantier.*

2H3 — Comparaison de deux proportions ou deux moyennes ; risques d'erreur

2H3 — Comparaison de deux proportions ou deux moyennes ; risques d'erreur

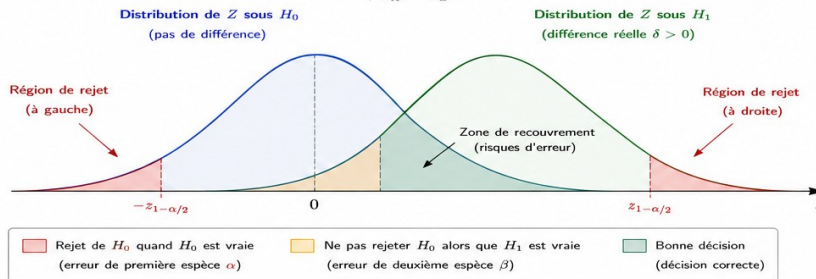
On veut comparer deux populations (ou deux procédés A et B).
On teste l'hypothèse nulle H_0 « pas de différence » contre l'hypothèse alternative H_1 « différence ».
La décision (rejeter ou non H_0) comporte toujours un risque d'erreur.

Comparaison de deux moyennes (exemple)

$H_0 : \mu_A = \mu_B$ (pas de différence)
 $H_1 : \mu_A \neq \mu_B$ (différence)

Statistique de test (grande taille d'échantillon) :

$$Z = \frac{\bar{X}_A - \bar{X}_B}{\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}}} \stackrel{H_0}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$$



Comparaison de deux proportions (analogie)

$H_0 : p_A = p_B$ vs $H_1 : p_A \neq p_B$

Statistique de test (grandes tailles) :

$$Z = \frac{\hat{p}_A - \hat{p}_B}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}\right)}} \stackrel{H_0}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$$

où $\hat{p} = \frac{n_A \hat{p}_A + n_B \hat{p}_B}{n_A + n_B}$ (proportion poolée sous H_0).

Exemple d'interprétation (test bilatéral)

Au niveau $\alpha = 5\%$, on a $z_{1-\alpha/2} = 1,96$.

- Si H_0 est vraie (courbe bleue), l'aire totale des deux zones rouges vaut 5% : c'est le risque α .
- Si H_1 est vraie (courbe verte, décalée), la puissance du test vaut $1 - \beta$ (aires vertes + rouges à droite et à gauche).
- La zone jaune et bleue centrale (aire β) correspond au risque de ne pas détecter une différence qui existe.

Règle de décision (test bilatéral)

Au niveau de signification α :

- On rejette H_0 si $|Z_{obs}| > z_{1-\alpha/2}$
 - On ne rejette pas H_0 si $|Z_{obs}| \leq z_{1-\alpha/2}$
- où $z_{1-\alpha/2}$ est le quantile d'ordre $1 - \frac{\alpha}{2}$ de la loi normale standard $\mathcal{N}(0, 1)$.

Risques d'erreur

- Erreur de première espèce (risque α) :**
rejeter H_0 alors qu'elle est vraie
(conclure à une différence alors qu'il n'y en a pas).
 $P(\text{rejeter } H_0 \mid H_0 \text{ vraie}) = \alpha$
- Erreur de deuxième espèce (risque β) :**
ne pas rejeter H_0 alors que H_1 est vraie
(ne pas détecter une différence réelle).
 $P(\text{ne pas rejeter } H_0 \mid H_1 \text{ vraie}) = \beta$
- Puissance du test :**
 $1 - \beta = \text{probabilité de détecter une différence quand elle existe (bonne détection)}.$

Valeurs critiques de $z_{1-\alpha/2}$ (test bilatéral)

α	10 %	5 %	1 %	0,1 %
$z_{1-\alpha/2}$	1,645	1,960	2,576	3,291

Plus l'écart réel entre les deux distributions est grand (décalage plus important), plus la puissance $1 - \beta$ est élevée.



Idée clé : Le recouvrement entre les deux distributions explique les risques d'erreur.

On cherche à choisir α et les tailles d'échantillon pour minimiser β (augmenter la puissance $1 - \beta$) tout en contrôlant α .

Au-delà d'un test portant sur un seul paramètre, on peut comparer deux populations entre elles (deux centrales, deux procédés) à l'aide d'un test de comparaison, tout en restant conscient des risques d'erreur inhérents à toute procédure de décision.

Comparaison de deux proportions ou deux moyennes

Dans le cadre de la loi normale, on utilise des tests bilatéraux ou unilatéraux permettant de comparer deux proportions (par exemple, le taux de non-conformité de deux centrales) ou deux moyennes (par exemple, la résistance moyenne de deux formulations de béton).

Risque d'erreur de première espèce

C'est le risque de rejeter à tort l'hypothèse nulle H_0 alors qu'elle est vraie (« fausse alerte »). Ce risque est égal au seuil de signification choisi pour le test.

Risque d'erreur de seconde espèce

C'est le risque de ne pas rejeter H_0 alors qu'elle est fausse (ne pas détecter un écart réel). On compare, à l'aide d'un algorithme ou de simulations, différents seuils de signification, ce qui permet de mettre en évidence ces deux types de risques et d'aborder la notion de puissance d'un test (capacité du test à détecter un écart réel).

Autres procédures

En liaison avec les disciplines professionnelles, on peut être amené à traiter quelques exemples d'autres procédures de test (test du khi-deux, test de Student), dans le cadre de la maîtrise statistique des procédés.

Exemple résolu

Énoncé

Deux équipes de pose d'enrobés appliquent chacune leur procédé sur un chantier. On compare, par un test statistique, le taux de non-conformité de surface (arrachements, défauts de planéité) des deux équipes.

Expliquer, dans ce contexte, ce que représenterait une erreur de première espèce et une erreur de seconde espèce.

Résolution

Une erreur de première espèce consisterait à conclure, à tort, que les deux équipes ont des taux de non-

conformité réellement différents, alors qu'en réalité leurs performances sont équivalentes (l'écart observé serait dû au seul hasard de l'échantillonnage).

Une erreur de seconde espèce consisterait à conclure que les deux équipes ont des performances équivalentes, alors qu'en réalité l'une des deux a un taux de non-conformité significativement différent de l'autre (l'écart réel ne serait pas détecté par le test).

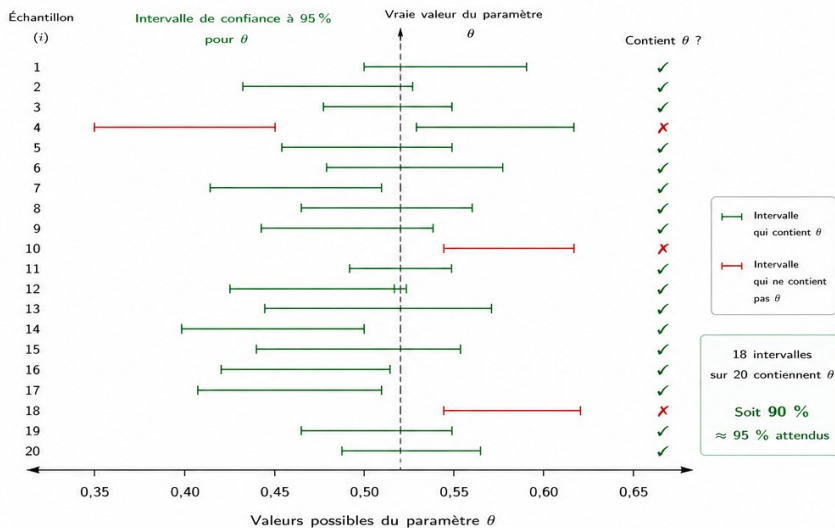
Applications métiers (Travaux Publics) : *Maîtrise statistique des procédés de fabrication (bétons, enrobés), contrôle qualité de réception de matériaux, incertitude de mesure sur chantier.*

2H4 — Estimation par intervalle de confiance

2H4 — Estimation par intervalle de confiance

On répète le prélèvement d'échantillons de même taille dans une population et, pour chacun, on construit un intervalle de confiance à 95 % pour un paramètre θ (moyenne, proportion,...). Environ 95 % de ces intervalles contiennent la vraie valeur θ .

Illustration : 20 échantillons indépendants et leurs intervalles de confiance à 95 %



Définition

Un intervalle de confiance à 95 % pour θ est un intervalle $I = [L ; U]$ calculé à partir d'un échantillon, tel que :

$$P(L \leq \theta \leq U) = 0,95$$

si l'on répète le processus d'échantillonnage un grand nombre de fois dans les mêmes conditions.

Le niveau de confiance (ici 95 %) représente la proportion d'intervalles construits de cette façon qui contiendront la vraie valeur du paramètre.

Exemples de formules (niveau 95 %)

• Moyenne (σ connu) :

$$I = \left[\bar{x} - 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

• Moyenne (σ inconnu) :

$$I = \left[\bar{x} - t_{n-1;0,975} \frac{s}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + t_{n-1;0,975} \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$$

• Proportion :

$$I = \left[\hat{p} - 1,96 \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} ; \hat{p} + 1,96 \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right]$$

À retenir

- Plus l'échantillon est grand, plus les intervalles sont courts (estimation plus précise).
- Plus le niveau de confiance est élevé, plus les intervalles sont larges.
- Un intervalle de confiance ne signifie pas que la probabilité que θ soit dans cet intervalle vaut 95 % : c'est la procédure qui, à long terme, couvre θ dans 95 % des cas.



Idée clé : En répétant un grand nombre de fois la même méthode, environ 95 % des intervalles de confiance à 95 % contiendront la vraie valeur du paramètre.

But : estimer θ avec une incertitude quantifiée.

Plutôt que d'estimer un paramètre par une valeur unique, l'estimation par intervalle de confiance fournit une fourchette de valeurs plausibles, assortie d'un niveau de confiance, ce qui permet de quantifier l'incertitude liée à l'échantillonnage.

Intervalle de confiance d'une proportion

Dans le cas d'une loi binomiale approximable par une loi normale, on détermine un intervalle de confiance pour la proportion p , à un niveau de confiance souhaité (souvent 95 % ou 99 %), à partir de la fréquence observée sur l'échantillon.

Intervalle de confiance d'une moyenne

On détermine de même un intervalle de confiance pour une moyenne, dans le cas d'une loi normale d'écart type connu, ou dans le cas de grands échantillons.

Confiance et probabilité

Il faut distinguer confiance et probabilité : avant le tirage d'un échantillon, la procédure d'obtention de l'intervalle de confiance a une probabilité de 0,95 (ou 0,99) de fournir un intervalle contenant le paramètre inconnu ; après le tirage, on dit que le paramètre est dans l'intervalle calculé avec une confiance de 95 % (ou 99 %) — le paramètre, une fois l'échantillon tiré, est fixé, seul l'intervalle varie d'un échantillon à l'autre.

Taille d'échantillon nécessaire

On peut déterminer la taille nécessaire d'un échantillon pour estimer une proportion ou une moyenne avec une précision donnée, ce qui est utile pour dimensionner un plan de contrôle en amont d'une campagne de mesures.

Exemple résolu

Énoncé

Sur un échantillon de 150 éprouvettes (cf. notion 2H1), la fréquence de non-conformité observée est $f = 0,08$. Un logiciel calcule, au niveau de confiance de 95 %, l'intervalle de confiance $[0,043 ; 0,117]$ pour la proportion p de non-conformité dans la population totale.

Interpréter ce résultat.

Résolution

On peut affirmer, avec un niveau de confiance de 95 %, que la proportion réelle p d'éprouvettes non conformes dans l'ensemble de la production est comprise entre 4,3 % et 11,7 %.

Cela signifie que la procédure utilisée pour construire cet intervalle a , avant le prélèvement de l'échantillon, 95 % de chances de fournir un intervalle contenant la vraie valeur de p ; ce n'est pas la probabilité, une fois l'échantillon tiré, que p appartienne précisément à $[0,043 ; 0,117]$.

Applications métiers (Travaux Publics) : *Maîtrise statistique des procédés de fabrication (bétons, enrobés), contrôle qualité de réception de matériaux, incertitude de mesure sur chantier.*

Exercices d'application

Ex. H1 — Estimation de la teneur en eau d'un sol

Énoncé

Sur un échantillon de 40 mesures de teneur en eau d'un sol, on obtient une moyenne de 18,4 % avec un écart type estimé de 2,1 %. Un logiciel calcule, au niveau de confiance de 95 %, l'intervalle de confiance pour la moyenne μ de la teneur en eau du sol : [17,75 % ; 19,05 %] (bornes arrondies).

- 1) Donner l'estimation ponctuelle de μ .
- 2) Interpréter l'intervalle de confiance obtenu.

Corrigé

- 1) L'estimation ponctuelle de la moyenne μ de la teneur en eau du sol est la moyenne observée sur l'échantillon, soit 18,4 %.
- 2) On peut affirmer, avec un niveau de confiance de 95 %, que la teneur en eau moyenne réelle du sol est comprise entre 17,75 % et 19,05 %. Cela signifie que la procédure utilisée a, avant le prélèvement, 95 % de chances de fournir un intervalle contenant la vraie valeur de μ .

Ex. H2 — Comparaison de deux procédés de compactage

Énoncé

On souhaite tester, au seuil de 5 %, si un nouveau procédé de compactage donne une densité moyenne différente de l'ancien procédé (densité moyenne de référence : 1,85 t/m³). L'hypothèse nulle est H_0 : « la densité moyenne obtenue avec le nouveau procédé est de 1,85 t/m³ ». Un logiciel calcule une région de rejet correspondant à une densité moyenne observée en dehors de l'intervalle [1,81 ; 1,89]. La densité moyenne observée avec le nouveau procédé, sur un échantillon, est de 1,93 t/m³.

- 1) Ce test est-il bilatéral ou unilatéral ?
- 2) Conclure quant au rejet ou non de H_0 .

Corrigé

- 1) L'hypothèse alternative (densité « différente », dans un sens ou dans l'autre) ne privilégie pas un sens d'écart : le test est bilatéral.
- 2) La valeur observée 1,93 n'appartient pas à [1,81 ; 1,89] (elle lui est supérieure) : elle appartient à la région de rejet. On rejette H_0 au seuil de 5 % : le nouveau procédé donne bien une densité moyenne significativement différente de 1,85 t/m³ (ici, supérieure).

Évaluation de fin de module (QCM)

Question 1. L'estimation ponctuelle d'une proportion p , à partir d'un échantillon, est généralement égale à :

- A. L'écart type observé sur l'échantillon
- B. La fréquence observée sur l'échantillon ✓ (réponse correcte)**
- C. La médiane de l'échantillon
- D. Le double de la fréquence observée

Explication : On estime ponctuellement une proportion p par la fréquence observée sur l'échantillon.

Question 2. Dans un test d'hypothèse, le risque d'erreur de première espèce correspond à :

- A. Ne pas rejeter H_0 alors qu'elle est fausse
- B. Rejeter H_0 alors qu'elle est vraie ✓ (réponse correcte)**
- C. Accepter systématiquement H_0
- D. Ne jamais se tromper

Explication : L'erreur de première espèce consiste à rejeter à tort l'hypothèse nulle H_0 alors qu'elle est vraie.

Question 3. Un test bilatéral est utilisé lorsque l'hypothèse alternative :

- A. Privilégie un écart uniquement supérieur
- B. Privilégie un écart uniquement inférieur
- C. Ne privilégie pas de sens d'écart particulier ✓ (réponse correcte)**
- D. N'existe pas

Explication : Un test bilatéral s'utilise quand on cherche un écart dans les deux sens (« différent de »), sans privilégier ni le sens supérieur ni le sens inférieur.

Question 4. Un intervalle de confiance à 95 % pour une moyenne μ signifie que :

- A. μ appartient à coup sûr à cet intervalle
- B. La procédure utilisée a, avant tirage de l'échantillon, 95 % de chances de fournir un intervalle contenant μ ✓ (réponse correcte)**
- C. 95 % des valeurs de l'échantillon appartiennent à cet intervalle
- D. L'écart type vaut 0,95

Explication : Le niveau de confiance de 95 % concerne la procédure de construction de l'intervalle, avant tirage de l'échantillon.

Question 5. Pour estimer une proportion ou une moyenne avec une meilleure précision, il faut en général :

- A. Diminuer la taille de l'échantillon
- B. Augmenter la taille de l'échantillon ✓ (réponse correcte)**
- C. Changer le niveau de confiance à 0 %
- D. Cela n'a pas d'influence

Explication : Plus la taille de l'échantillon est grande, plus l'estimation (et l'intervalle de confiance associé) est précise.

Module I — Calcul matriciel

2ème année

Notions du module

Code	Notion	Durée (h)
2I1	Matrices : définitions et opérations	2
2I2	Matrice inverse	2
2I3	Résolution de systèmes d'équations linéaires	2
2I4	Puissances de matrices ; suites définies par une relation matricielle	1
2I5	Applications du calcul matriciel aux problèmes professionnels	2

2I1 — Matrices : définitions et opérations

2I1 — Matrices : définitions et opérations

Une matrice est un tableau rectangulaire de nombres réels (ou complexes) disposés en lignes et colonnes.

Si A a m lignes et n colonnes, on note $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$.

Produit matriciel

Soit $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{R})$.

Le produit $C = AB$ est la matrice de taille $m \times p$

dont l'élément de la ligne i et de la colonne j est :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

Matrice A ($m \times n$) Matrice B ($n \times p$) Matrice $C = AB$ ($m \times p$)

Chaque élément c_{ij} de C est obtenu par le produit scalaire de la ligne i de A avec la colonne j de B :

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

Exemple numérique

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$$

Calcul de c_{12} (ligne 1 de A avec colonne 2 de B) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \times (-1) + 2 \times 3 + 3 \times 4 = 17 \Rightarrow C = AB = \begin{pmatrix} -1 & 17 \\ 7 & -7 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

Condition d'existence

Le produit AB existe si et seulement si le nombre de colonnes de A (n) est égal au nombre de lignes de B (n).

Autres opérations sur les matrices

Addition (mêmes dimensions)

Si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont dans $\mathcal{M}_{m \times n}$,

$$C = A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

(somme terme à terme)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Multiplication par un scalaire

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $A = (a_{ij})$,

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})$$

$$2 \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Transposée

Si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}$,

A^T est la matrice $n \times m$ définie par

$$(A^T)_{ij} = a_{ji}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Produit de matrices (rappel)

Si $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ et $B \in \mathcal{M}_{n \times p}$,

$$C = AB \in \mathcal{M}_{m \times p}$$

$$(c_{ij}) = \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right)$$



À retenir : Le produit AB se calcule "ligne de A " $\times$ "colonne de B ". Résultat : matrice $m \times p$.

Une matrice est un tableau rectangulaire de nombres, qui permet d'organiser et de manipuler efficacement de grandes quantités de données ou de coefficients d'un système d'équations, notamment à l'aide d'un logiciel.

Définition

Une matrice de dimension (ou de taille) $n \times p$ est un tableau de nombres réels comportant n lignes et p colonnes. On note a_{ij} le coefficient situé à la ligne i et à la colonne j . Une matrice carrée a autant de lignes que de colonnes ($n = p$).

Somme de deux matrices

Deux matrices de même dimension s'additionnent terme à terme : si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$, alors $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$.

Produit d'une matrice par un scalaire

Pour un réel k , $k \times A = (k \times a_{ij})$: chaque terme de la matrice est multiplié par k .

Produit de deux matrices

Le produit $A \times B$ n'est défini que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B . Chaque coefficient du produit est la somme des produits termes à termes d'une ligne de A par une colonne de B . Le produit matriciel n'est en général pas commutatif ($A \times B \neq B \times A$).

Matrice identité

La matrice identité I_n (carrée, de taille n) a des 1 sur la diagonale principale et des 0 ailleurs ; elle est l'élément neutre du produit matriciel : $A \times I_n = I_n \times A = A$ pour toute matrice carrée A de taille n .

Outils

Ces opérations se pratiquent à la main dans les cas simples (petites matrices) et à l'aide d'un logiciel (tableur, calculatrice, logiciel de calcul formel) dans tous les cas, notamment pour des matrices de grande taille.

Exemple résolu

Énoncé

On donne $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ (matrices 2×2).

1) Calculer $A + B$.

2) Calculer $2A$.

3) Calculer le produit $A \times B$.

Résolution

1) $A + B = [[2+1, 1+(-1)], [0+2, 3+4]] = [[3, 0], [2, 7]]$.

2) $2A = [[4, 2], [0, 6]]$.

3) $A \times B$: coefficient (1,1) = $2 \times 1 + 1 \times 2 = 4$; coefficient (1,2) = $2 \times (-1) + 1 \times 4 = 2$; coefficient (2,1) = $0 \times 1 + 3 \times 2 = 6$; coefficient (2,2) = $0 \times (-1) + 3 \times 4 = 12$.

$A \times B = [[4, 2], [6, 12]]$.

Applications métiers (Travaux Publics) : Résolution de systèmes d'équations linéaires issus du calcul de structures (méthode des déplacements, réactions d'appui), traitement de données topométriques, calculs itératifs de RDM et de mécanique des sols.

212 — Matrice inverse

212 — Matrice inverse

Soit A une matrice carrée inversible d'ordre n .
 Il existe une unique matrice carrée, notée A^{-1} , telle que : $A \times A^{-1} = I_n$ (matrice identité d'ordre n).
 La matrice A^{-1} est appelée la **matrice inverse** de A .

Matrice A ($n \times n$)		Matrice inverse A^{-1}		Matrice identité I_n	
$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$	$\times$	$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$	$=$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$	Propriété A inversible $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$ Dans ce cas : $(A^{-1})^{-1} = A$ et $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_n$

Comment trouver A^{-1} ?

- Par la formule (matrice 2×2) :
 Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $ad - bc \neq 0$, alors

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$
- Ou par la méthode de Gauss-Jordan :
 on applique des opérations élémentaires sur $[A | I_n]$
 jusqu'à obtenir $[I_n | A^{-1}]$.

Condition d'existence

La matrice inverse A^{-1} existe
 si et seulement si
 A est carrée et $\det(A) \neq 0$.

Dans le cas contraire,
 la matrice inverse n'existe pas.

Exemple numérique (ordre 3)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \times A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$



À retenir : La matrice A^{-1} "annule" A pour le produit matriciel : multiplier A par son inverse donne la matrice identité.
 L'inverse est unique, quand il existe.

L'inverse d'une matrice carrée généralise, pour les matrices, la notion d'inverse d'un nombre réel non nul, et permet de résoudre directement un système d'équations linéaires écrit sous forme matricielle.

Définition

Une matrice carrée A de taille n est dite inversible s'il existe une matrice carrée A^{-1} de même taille telle que $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_n$. Toutes les matrices carrées ne sont pas inversibles.

Calcul de l'inverse

On calcule l'inverse d'une matrice, lorsqu'elle existe, à la main pour une matrice 2×2 (formule directe à partir du déterminant) et à l'aide d'un logiciel de calcul formel dans tous les autres cas.

Cas d'une matrice 2×2

Pour $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, le déterminant de A vaut $\det(A) = ad - bc$. Si $\det(A) \neq 0$, A est inversible et $A^{-1} = (1/\det(A)) \times \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$. Si $\det(A) = 0$, A n'est pas inversible.

Résolution matricielle d'un système

Un système linéaire s'écrit sous forme matricielle $AX = B$, où A est la matrice des coefficients, X la matrice colonne des inconnues et B la matrice colonne des seconds membres. Si A est inversible, l'unique solution du système est donnée par $X = A^{-1} \times B$.

Exemple résolu

Énoncé

On donne $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$.

- Calculer $\det(A)$ et en déduire que A est inversible.
- Calculer A^{-1} .

Résolution

- $\det(A) = 3 \times 3 - 2 \times 4 = 9 - 8 = 1 \neq 0$: A est inversible.
- $A^{-1} = (1/1) \times \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$.

Vérification : $A \times A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 \times 3 + 2 \times (-4) & 3 \times (-2) + 2 \times 3 \\ 4 \times 3 + 3 \times (-4) & 4 \times (-2) + 3 \times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 - 8 & -6 + 6 \\ 12 - 12 & -8 + 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$

$$[[1, 0], [0, 1]] = I_2. \checkmark$$

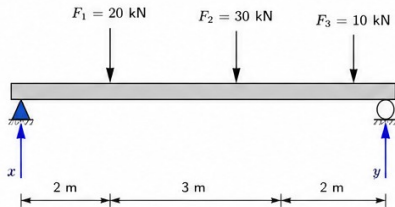
Applications métiers (Travaux Publics) : Résolution de systèmes d'équations linéaires issus du calcul de structures (méthode des déplacements, réactions d'appui), traitement de données topométriques, calculs itératifs de RDM et de mécanique des sols.

213 — Résolution de systèmes d'équations linéaires

213 — Résolution de systèmes d'équations linéaires

La résolution d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues peut modéliser, par exemple, l'équilibre d'une poutre soumise à des charges.

1) Modèle : poutre simplement appuyée



- x : réaction verticale de l'appui A (en kN)
- y : réaction verticale de l'appui B (en kN)
- Hypothèse : poutre en équilibre statique
⇒ Somme des forces verticales = 0
Somme des moments en A = 0

2) Système d'équations linéaires

Équations d'équilibre

$$\begin{cases} x + y = 20 + 30 + 10 = 60 \\ 5y - 2 \times 20 - 5 \times 30 - 7 \times 10 = 0 \\ 5y - 240 = 0 \end{cases}$$

Système

$$\begin{cases} x + y = 60 & (1) \\ 5y = 240 & (2) \end{cases}$$



Résolution algébrique

De (2) : $y = \frac{240}{5} = 48$

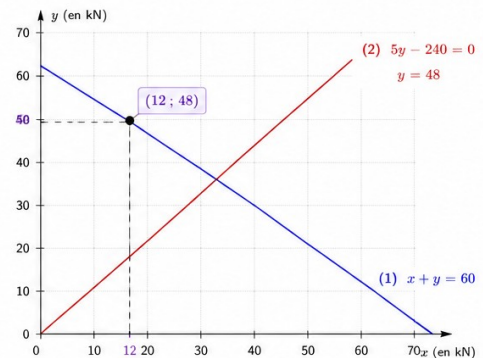
Dans (1) : $x = 60 - 48 = 12$

Solution : $(x; y) = (12; 48)$

Réactions d'appui : $x = 12 \text{ kN}$, $y = 48 \text{ kN}$

3) Résolution graphique

- On associe à chaque équation une droite dans le repère $(x; y)$.
- La solution du système est le point d'intersection des deux droites.



- La droite (1) coupe les axes en $(60; 0)$ et $(0; 60)$
- La droite (2) coupe les axes en $(0; 0)$ et $(48; 60)$



À retenir :

Un système linéaire de deux équations à deux inconnues peut se résoudre :

- algébriquement (méthodes de substitution, combinaison, etc.)
- graphiquement : la solution est le point d'intersection des deux droites représentant les équations.

Solution physique :

$x = 12 \text{ kN}$, $y = 48 \text{ kN}$

De nombreux problèmes techniques (calcul de structures, équilibrage de réseaux, topométrie) se ramènent à la résolution d'un système de plusieurs équations linéaires à plusieurs inconnues.

Système linéaire

Un système de n équations linéaires à p inconnues est un ensemble de n équations de la forme $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_px_p = b$, à résoudre simultanément.

Méthodes de résolution « à la main »

Pour un petit système (2 ou 3 équations), on utilise la substitution (exprimer une inconnue en fonction des autres à l'aide d'une équation, puis remplacer dans les autres), la combinaison linéaire des équations (pour éliminer une inconnue), ou la méthode du pivot de Gauss (élimination successive et systématique des inconnues, ligne par ligne).

Résolution par logiciel ou calculatrice

Pour un système de taille quelconque, on écrit le système sous forme matricielle $AX = B$ et on obtient la solution à l'aide d'un logiciel ou d'une calculatrice, soit par inversion de la matrice A (si elle est carrée et inversible), soit à l'aide d'une fonction de résolution de systèmes intégrée.

Existence et unicité de la solution

Un système peut n'avoir aucune solution, une solution unique, ou une infinité de solutions ; lorsque le système est carré (autant d'équations que d'inconnues) et que la matrice associée est inversible, la solution est unique.

Exemple résolu

Énoncé

Un bureau d'études doit déterminer les réactions d'appui d'une poutre reposant sur deux appuis, ce qui conduit au système :

$$3x + 2y = 130$$

$$4x + 3y = 180$$

où x et y sont les réactions d'appui (en kN).

Résoudre ce système par combinaison linéaire.

Résolution

$$3x + 2y = 130 \quad (1)$$

$$4x + 3y = 180 \quad (2)$$

On multiplie (1) par 3 et (2) par 2 pour éliminer y :

$$9x + 6y = 390$$

$$8x + 6y = 360$$

En soustrayant : $(9x+6y) - (8x+6y) = 390 - 360$, soit $x = 30$.

En reportant dans (1) : $3 \times 30 + 2y = 130$, soit $90 + 2y = 130$, $2y = 40$, $y = 20$.

Les réactions d'appui valent $x = 30$ kN et $y = 20$ kN.

Vérification dans (2) : $4 \times 30 + 3 \times 20 = 120 + 60 = 180$. ✓ (On retrouve d'ailleurs que la matrice associée $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ est celle de l'exemple précédent, d'inverse $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$, ce qui donne directement $x = 3 \times 130 - 2 \times 180 = 390 - 360 = 30$ et $y = -4 \times 130 + 3 \times 180 = -520 + 540 = 20$, résultat identique.)

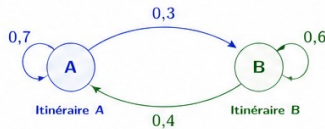
Applications métiers (Travaux Publics) : Résolution de systèmes d'équations linéaires issus du calcul de structures (méthode des déplacements, réactions d'appui), traitement de données topométriques, calculs itératifs de RDM et de mécanique des sols.

214 — Puissances de matrices ; suites définies par une relation matricielle

214 — Puissances de matrices ; suites définies par une relation matricielle

Dans un processus où un flux se répartit entre plusieurs itinéraires à chaque étape, l'évolution peut être décrite par une relation matricielle. Les puissances d'une matrice de transition permettent de prévoir les états futurs.

1) Réseau à deux itinéraires (états)



- 0,3 : probabilité qu'un camion passant par A continue par B à l'étape suivante.
 - 0,7 : probabilité qu'un camion passant par A reste sur A à l'étape suivante.
- (De même pour B.)

2) Matrice de transition

On note P la matrice de transition
(lignes : état actuel ; colonnes : état suivant).

$$P = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$$

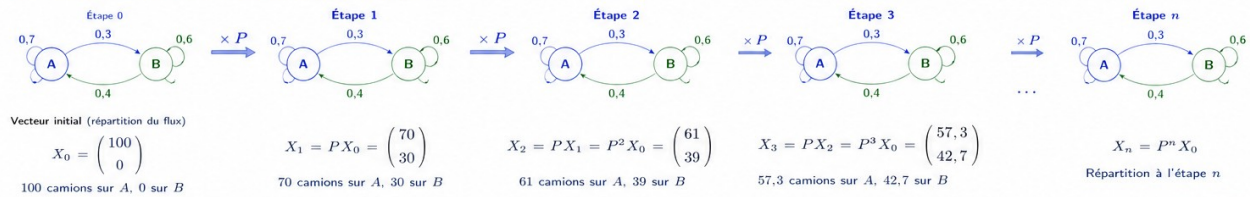
Propriétés

- Chaque coefficient p_{ij} est une probabilité : $0 \leq p_{ij} \leq 1$.
- La somme des coefficients de chaque ligne vaut 1.
- P^n donne les probabilités de transition en n étapes : $(P^n)_{ij} = \mathbb{P}(\text{être en } j \text{ à l'étape } n \mid \text{être en } i \text{ à l'étape } 0)$.

Interprétation

Si $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ est le vecteur (colonne) donnant la répartition du flux à l'étape n (a_n sur A, b_n sur B), alors :
 $X_{n+1} = P X_n$ et $X_n = P^n X_0$.

3) Évolution du flux au cours des étapes (puissances de P)



Puissances de P	P^1	P^2	P^3	P^n (quand n est grand)
	$\begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,61 & 0,39 \\ 0,52 & 0,48 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,573 & 0,427 \\ 0,569 & 0,431 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,571 & 0,429 \\ 0,571 & 0,429 \end{pmatrix}$ (stabilité à long terme)

Interprétation à long terme

Quand n devient grand, la répartition tend vers un état stable (stationnaire) :
 $\approx 57,1\%$ des camions sur A
et $\approx 42,9\%$ sur B à chaque étape.

À retenir : Les puissances de la matrice de transition permettent de prévoir la répartition du flux après n étapes : $X_n = P^n X_0$.
Elles modélisent l'évolution d'un processus aléatoire (chaîne de Markov) en discrétisant le temps.

Certains systèmes évoluant par étapes successives (répartition de flux, états d'un processus) se modélisent par une suite de matrices colonnes liées par une relation de récurrence, dont l'étude repose sur le calcul de puissances de matrices.

Puissance d'une matrice carrée

Pour une matrice carrée A et un entier naturel n , A^n désigne le produit de A par elle-même n fois (avec $A^0 = I$, matrice identité). Ce calcul, rapidement fastidieux à la main dès que n dépasse 2 ou 3, se fait à l'aide d'un logiciel.

Suite de matrices colonnes définie par récurrence

Si U_n est une matrice colonne représentant l'état d'un système à l'étape n , et si l'évolution d'une étape à la suivante s'écrit $U_{n+1} = A \times U_n$ (A matrice carrée constante), alors, par récurrence : $U_n = A^n \times U_0$. Le calcul de A^n (à l'aide d'un logiciel) permet donc de déterminer directement l'état du système à n'importe quelle étape, sans calculer tous les états intermédiaires.

Exemple résolu

Énoncé

L'état d'un réseau de distribution est décrit par une matrice colonne $U_n = [x_n ; y_n]$, avec la relation de récurrence $U_{n+1} = A \times U_n$ où $A = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{bmatrix}$ et $U_0 = [100 ; 50]$.

Calculer U_1 à partir de U_0 et A .

Résolution

$$U_1 = A \times U_0 :$$

$$x_1 = 0,9 \times 100 + 0,1 \times 50 = 90 + 5 = 95.$$

$$y_1 = 0,2 \times 100 + 0,8 \times 50 = 20 + 40 = 60.$$

$$U_1 = [95 ; 60].$$

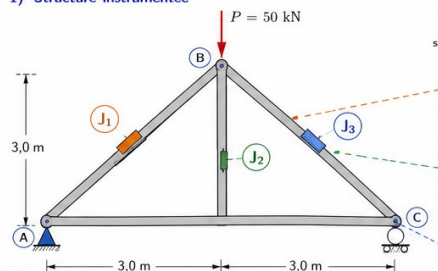
Pour obtenir U_{10} par exemple, on calculerait A^{10} à l'aide d'un logiciel puis $U_{10} = A^{10} \times U_0$, plutôt que d'itérer 10 fois le calcul terme à terme.

Applications métiers (Travaux Publics) : Résolution de systèmes d'équations linéaires issus du calcul de structures (méthode des déplacements, réactions d'appui), traitement de données topométriques, calculs itératifs de RDM et de mécanique des sols.

215 — Applications du calcul matriciel aux problèmes professionnels

Exemple : détermination des efforts dans une structure métallique triangulée à partir de mesures de déformations (jauges de contrainte).

1) Structure instrumentée



J1 : jauge sur la barre AB (diagonale gauche)
J2 : jauge sur la barre verticale BD
J3 : jauge sur la barre BC (diagonale droite)

Inconnues recherchées
 x_1 : effort normal dans AB (traction +)
 x_2 : effort normal dans BD (traction +)
 x_3 : effort normal dans BC (traction +)

2) Mise en équations à partir des mesures

Chaque jauge mesure une déformation ϵ_i liée à l'effort normal x_i dans la barre sur laquelle elle est collée et aux efforts dans les autres barres reliées au même nœud.

$$\text{J1 sur AB} \Rightarrow \epsilon_1 = 210 \mu\epsilon$$

$$0,866 x_1 - 0,500 x_2 = \frac{210}{k} \quad (1)$$

$$\text{J2 sur BD} \Rightarrow \epsilon_2 = -120 \mu\epsilon$$

$$-0,500 x_1 + 1,000 x_2 - 0,500 x_3 = \frac{-120}{k} \quad (2)$$

$$\text{J3 sur BC} \Rightarrow \epsilon_3 = 160 \mu\epsilon$$

$$0,866 x_3 - 0,500 x_2 = \frac{160}{k} \quad (3)$$

k : coefficient de proportionnalité matériau
($k = E \cdot \frac{A}{L}$, ici k est connu) $\mu\epsilon$: microdéformation ($1 \mu\epsilon = 10^{-6}$)

3) Écriture matricielle du système

Le système (1)–(2)–(3) s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 0,866 & -0,500 & 0 \\ -0,500 & 1,000 & -0,500 \\ 0 & -0,500 & 0,866 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 210/k \\ -120/k \\ 160/k \end{pmatrix}$$

Matrice des coefficients A Vecteur des inconnues X Vecteur des mesures B

Forme compacte

$$AX = B$$

d'où

$$X = A^{-1}B$$

A : matrice 3×3 des coefficients

X : vecteur des efforts inconnus

B : vecteur des termes connus

A^{-1} : matrice inverse de A

4) Résolution numérique (exemple)

En résolvant le système (par inversion ou tout autre méthode) :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28,4 \\ -18,7 \\ 24,9 \end{pmatrix} \text{ kN}$$

Interprétation

$x_1 = 28,4 \text{ kN}$ (traction)
 $x_2 = -18,7 \text{ kN}$ (compression)
 $x_3 = 24,9 \text{ kN}$ (traction)

5) Remarques

- Le calcul matriciel permet de traiter efficacement des structures plus complexes (plus de barres, plus de mesures).
- Les équations proviennent de la mécanique des structures (équilibre des nœuds) et de la loi de Hooke ($\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{EA}$).
- Les mesures de déformation fournissent des informations expérimentales pour identifier les efforts internes.

6) Application professionnelle

Cette démarche est utilisée en bureau d'études pour :

- le contrôle d'ouvrages existants (ponts, passerelles...),
- la validation d'hypothèses de calcul,
- le suivi en temps réel de structures instrumentées.



À retenir :

Le calcul matriciel permet de modéliser et de résoudre des problèmes réels en écrivant les équations d'un système sous la forme $AX = B$. Il offre une méthode compacte, générale et puissante pour traiter des systèmes à plusieurs inconnues.

Le calcul matriciel synthétise en une seule écriture des problèmes comportant de nombreuses inconnues liées entre elles ; il est très largement utilisé dans les logiciels de calcul de structures et de traitement de données topométriques.

Mise en équation matricielle d'un problème professionnel

De nombreux problèmes de calcul de structures (méthode des déplacements, équilibre d'un système de forces à plusieurs inconnues) et de topométrie (ajustement de plusieurs mesures redondantes) se traduisent naturellement par un système linéaire, que l'on écrit sous forme matricielle $AX = B$ avant de le résoudre à l'aide d'un logiciel.

Intérêt de l'écriture matricielle

Au-delà de la compacité de l'écriture, la forme matricielle permet de traiter de façon identique des systèmes de tailles très différentes (de 2 inconnues à plusieurs centaines), les logiciels de calcul de structures reposant précisément sur l'inversion ou la résolution de très grands systèmes matriciels.

Démarche générale

Face à un problème professionnel : on identifie les inconnues, on écrit les relations (équilibre, compatibilité) sous forme d'équations linéaires, on les organise sous forme matricielle $AX = B$, puis on résout à l'aide d'un logiciel et on interprète le résultat obtenu dans le contexte du problème.

Exemple résolu

Énoncé

Trois jauges de contrainte, disposées sur une structure métallique, fournissent chacune une combinaison linéaire de trois efforts inconnus N_1 , N_2 , N_3 (en kN) :

$$N_1 + N_2 = 40$$

$$N_2 + N_3 = 55$$

$$N_1 + N_3 = 45$$

1) Écrire ce système sous forme matricielle $AX = B$.

2) Un logiciel de calcul formel donne comme solution $N_1 = 15$, $N_2 = 25$, $N_3 = 30$. Vérifier cette solution dans les trois équations.

Résolution

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $X = [N_1 ; N_2 ; N_3]$, $B = [40 ; 55 ; 45]$.

2) Vérification : $N_1 + N_2 = 15 + 25 = 40 \checkmark$; $N_2 + N_3 = 25 + 30 = 55 \checkmark$; $N_1 + N_3 = 15 + 30 = 45 \checkmark$.

La solution proposée par le logiciel vérifie bien les trois équations : $N_1 = 15 \text{ kN}$, $N_2 = 25 \text{ kN}$, $N_3 = 30 \text{ kN}$.

Applications métiers (Travaux Publics) : Résolution de systèmes d'équations linéaires issus du calcul de structures (méthode des déplacements, réactions d'appui), traitement de données topométriques, calculs itératifs de RDM et de mécanique des sols.

Exercices d'application

Ex. I1 — Répartition d'un flux sur deux itinéraires de chantier

Énoncé

Un flux de camions se répartit chaque jour entre deux itinéraires d'accès à un chantier, selon la relation $U_{n+1} = A \times U_n$, où $U_n = [x_n ; y_n]$ (nombre de camions sur chaque itinéraire) et $A = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{bmatrix}$. On donne $U_0 = [60 ; 40]$.

1) Calculer U_1 .

2) Vérifier que le nombre total de camions ($x_n + y_n$) reste constant d'une étape à l'autre.

Corrigé

1) $x_1 = 0,8 \times 60 + 0,3 \times 40 = 48 + 12 = 60$. $y_1 = 0,2 \times 60 + 0,7 \times 40 = 12 + 28 = 40$.

$U_1 = [60 ; 40]$ (identique à U_0 : cette répartition est un état stable pour cette matrice A).

2) $x_0 + y_0 = 60 + 40 = 100$; $x_1 + y_1 = 60 + 40 = 100$. Le total reste bien constant (chaque colonne de A a une somme égale à 1 : $0,8 + 0,2 = 1$ et $0,3 + 0,7 = 1$, propriété caractéristique d'une matrice de transition qui conserve le total).

Ex. I2 — Calcul des efforts dans un système de poutres

Énoncé

Le calcul des efforts dans un système simple conduit au système linéaire :

$$2x + y = 70$$

$$x + 3y = 90$$

1) Écrire la matrice A des coefficients et calculer $\det(A)$.

2) En déduire A^{-1} , puis résoudre le système à l'aide de A^{-1} .

Corrigé

1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. $\det(A) = 2 \times 3 - 1 \times 1 = 6 - 1 = 5 \neq 0$ (A est inversible).

2) $A^{-1} = (1/5) \times \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6 & -0,2 \\ -0,2 & 0,4 \end{bmatrix}$.

$X = A^{-1} \times B$ avec $B = [70 ; 90]$:

$$x = 0,6 \times 70 + (-0,2) \times 90 = 42 - 18 = 24.$$

$$y = (-0,2) \times 70 + 0,4 \times 90 = -14 + 36 = 22.$$

Solution : $x = 24$, $y = 22$. Vérification : $2 \times 24 + 22 = 70$ ✓ ; $24 + 3 \times 22 = 24 + 66 = 90$ ✓.

Évaluation de fin de module (QCM)

Question 1. Le produit de deux matrices A ($n \times p$) et B ($p \times m$) est défini si et seulement si :

A. A et B ont la même dimension

B. Le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B ✓ (réponse correcte)

C. A et B sont toutes deux carrées

D. Le nombre de lignes de A est égal au nombre de lignes de B

Explication : Le produit $A \times B$ n'est défini que si le nombre de colonnes de A égale le nombre de lignes de B .

Question 2. Une matrice carrée A est inversible si et seulement si :

A. Son déterminant est nul

B. Son déterminant est non nul ✓ (réponse correcte)

C. Elle est symétrique

D. Tous ses coefficients sont positifs

Explication : A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

Question 3. Pour résoudre un système linéaire écrit sous forme matricielle $AX = B$, avec A carrée inversible, on calcule :

A. $X = A \times B$

B. $X = A^{-1} \times B$ ✓ (réponse correcte)

C. $X = B^{-1} \times A$

D. $X = A + B$

Explication : Si A est inversible, l'unique solution du système $AX = B$ est $X = A^{-1} \times B$.

Question 4. Si $U_{n+1} = A \times U_n$, alors U_n , en fonction de U_0 , s'exprime par :

A. $U_n = A + n \times U_0$

B. $U_n = A^n \times U_0$ ✓ (réponse correcte)

C. $U_n = n \times A \times U_0$

D. $U_n = A^{-n} \times U_0$

Explication : Par récurrence, à partir de $U_{n+1} = A \times U_n$, on obtient $U_n = A^n \times U_0$.

Question 5. Le produit matriciel $A \times B$ est-il, en général, égal au produit $B \times A$?

A. Oui, toujours

B. Non, le produit matriciel n'est en général pas commutatif ✓ (réponse correcte)

C. Oui, mais seulement pour les matrices carrées

D. Cela dépend uniquement de la taille des matrices

Explication : Le produit matriciel n'est en général pas commutatif : $A \times B \neq B \times A$.

Module J — Équations différentielles

2ème année

Notions du module

Code	Notion	Durée (h)
2J1	Équations différentielles linéaires du 1er ordre à coefficients constants	2
2J2	Rappel : nombres complexes et équation du second degré à coefficients réels	1
2J3	Équations différentielles linéaires du 2nd ordre à coefficients constants	2
2J4	Modélisation pluridisciplinaire par équations différentielles	1

2J1 — Équations différentielles linéaires du 1er ordre à coefficients constants

2J1 — Équations différentielles linéaires du 1^{er} ordre à coefficients constants

On considère l'équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre à coefficients constants :

$$\theta' = -0,2 \theta$$

1) Équation différentielle

$$\theta' = -0,2 \theta$$

où $\theta(t)$ est la fonction inconnue de la variable réelle t (par exemple une température).

2) Solution générale

La solution générale est :

$$\theta(t) = C e^{-0,2t}$$

où C est une constante réelle.

3) Condition initiale

Pour une condition initiale $\theta(0) = \theta_0$, on obtient :

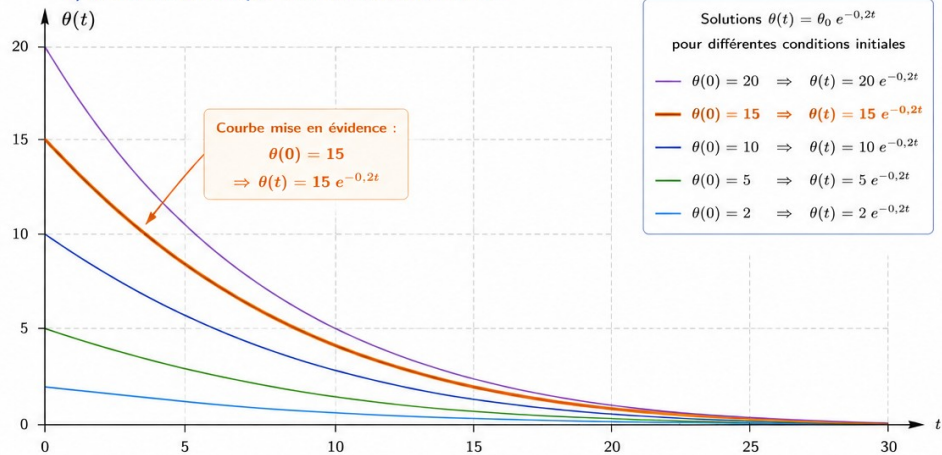
$$\theta(t) = \theta_0 e^{-0,2t}$$

Interprétation

Toutes les solutions décroissent exponentiellement vers 0 quand t augmente.

Plus la condition initiale $\theta(0)$ est grande, plus la courbe part haut, mais la vitesse de décroissance est la même pour toutes.

4) Famille de solutions pour différentes conditions initiales



5) Remarques importantes

- Le signe négatif du coefficient $-0,2$ implique une décroissance exponentielle.
- La constante de temps vaut $\tau = -\frac{1}{-0,2} = 5$.
- Au bout de 5 unités de temps, la solution est multipliée par $e^{-1} \approx 0,37$ (environ 37 % de la valeur initiale).

t	0	5	10	15	20
$e^{-0,2t}$	1	0,37	0,14	0,05	0,02

Exemple (courbe orange) :

$$\begin{aligned}\theta(5) &= 15e^{-1} \approx 5,53 \\ \theta(10) &= 15e^{-2} \approx 2,03\end{aligned}$$

Une équation différentielle relie une fonction inconnue à sa (ou ses) dérivée(s) ; elle permet de modéliser un phénomène continu dont on connaît la loi d'évolution instantanée, comme le refroidissement d'un matériau ou la charge d'un condensateur.

Forme générale

On étudie les équations de la forme $a y' + b y = c(t)$, où a et b sont des constantes réelles ($a \neq 0$) et c une fonction continue à valeurs réelles ; y désigne la fonction inconnue (souvent notée $y(t)$) et y' sa dérivée.

Solution générale

La solution générale de l'équation homogène associée à $y' + b y = 0$ est $y(t) = K e^{-(b/a)t}$, K étant une constante réelle. La solution générale de l'équation complète s'obtient en ajoutant à cette solution une solution particulière de l'équation avec second membre ; les indications permettant d'obtenir cette solution particulière sont données lorsque nécessaire.

Condition initiale

Une équation différentielle du 1^{er} ordre admet une infinité de solutions (une pour chaque valeur de la constante K) ; une condition initiale (valeur de y à un instant donné) permet de déterminer une solution unique, correspondant à une valeur précise de K .

Outils

On résout une équation différentielle du premier ordre à la main dans les cas simples, et à l'aide d'un logiciel de calcul formel dans tous les cas ; on peut représenter à l'aide d'un logiciel la famille des courbes représentatives des solutions.

Méthode d'Euler

Sur un exemple, on peut présenter la résolution approchée d'une équation différentielle par la méthode d'Euler, qui construit une approximation de la solution de proche en proche à partir de la condition initiale et du pas de temps choisi.

Exemple résolu

Énoncé

La température $\theta(t)$ (en °C) d'un béton en cours de durcissement, au-delà de la température ambiante, vérifie l'équation différentielle $\theta' = -0,2 \theta$, avec la condition initiale $\theta(0) = 15$.

- 1) Résoudre cette équation différentielle.
- 2) Calculer $\theta(5)$ (arrondi à 10^{-2} près) et interpréter.

Résolution

1) L'équation s'écrit $\theta' + 0,2 \theta = 0$, de la forme $a y' + b y = 0$ avec $a = 1$ et $b = 0,2$. La solution générale est $\theta(t) = K e^{(-0,2t)}$.

La condition initiale $\theta(0) = 15$ donne $K e^0 = 15$, donc $K = 15$.

La solution est $\theta(t) = 15 e^{(-0,2t)}$.

2) $\theta(5) = 15 e^{(-0,2 \times 5)} = 15 e^{-1} \approx 15 \times 0,3679 \approx 5,52$ °C.

Après 5 heures, l'écart de température par rapport à l'ambiante n'est plus que d'environ 5,5 °C, contre 15 °C initialement : le refroidissement se poursuit de façon exponentiellement décroissante.

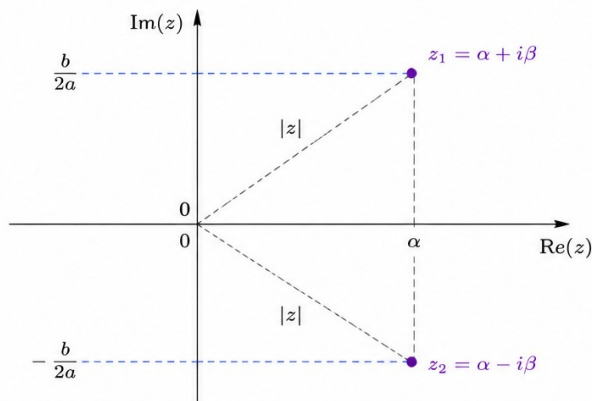
Applications métiers (Travaux Publics) : Modélisation de phénomènes continus : charge/décharge d'un condensateur, tassement différé d'un sol, refroidissement d'un matériau (béton en cours de prise), vibrations amorties d'un ouvrage.

2J2 — Rappel : nombres complexes et équation du second degré à coefficients réels

2J2 — Rappel : nombres complexes et équation du second degré à coefficients réels

Toute équation du second degré à coefficients réels ayant un discriminant négatif admet deux racines complexes **conjuguées**.

1) Représentation dans le plan complexe



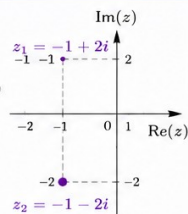
4) Exemple

Résoudre $z^2 + 2z + 5 = 0$

$$a = 1, b = 2, c = 5 \Rightarrow \Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 5 = -16 < 0$$

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -1, \quad \beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{4}{2} = 2$$

Racines : $z_1 = -1 + 2i$ et $z_2 = -1 - 2i$



2) Équation du second degré à coefficients réels

Équation caractéristique : $az^2 + bz + c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$

Discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$

Si $\Delta < 0$, l'équation admet deux racines complexes **conjuguées** :

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \alpha \pm i\beta$$

$$\text{avec } \begin{cases} \alpha = -\frac{b}{2a} & (\text{partie réelle}) \\ \beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} > 0 & (\text{partie imaginaire}) \end{cases}$$

3) Interprétation graphique

- Les deux racines sont symétriques par rapport à l'axe des réels.
- Elles ont la même partie réelle α et des parties imaginaires opposées $\pm\beta$.
- Le module de chaque racine est : $|z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

À retenir

- Si $\Delta \geq 0$: deux racines réelles ($\Delta > 0$) ou une racine réelle double ($\Delta = 0$).
- Si $\Delta < 0$: deux racines complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$.

Avant d'aborder les équations différentielles linéaires du second ordre, on réactive la résolution, dans $\mathbb{C}$, d'une équation du second degré à coefficients réels, indispensable pour déterminer l'équation caractéristique de ces équations différentielles.

Rappel de 1ère année

Ce point a été traité en détail dans le module Nombres complexes de 1ère année (notion 1D4) : pour $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c réels, $a \neq 0$), le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ détermine la nature des solutions (deux réelles si $\Delta > 0$, une réelle double si $\Delta = 0$, deux complexes conjuguées si $\Delta < 0$).

Écriture algébrique

Dans le cadre des équations différentielles, on se limite à l'écriture algébrique $a + ib$ des solutions complexes de l'équation du second degré.

Rôle dans les équations différentielles

Ce rappel prépare directement l'étude de l'équation caractéristique associée à une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants (notion 2J3), équation du second degré dont la nature des racines détermine la forme des solutions de l'équation différentielle.

Exemple résolu

Énoncé

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $r^2 + 4r + 13 = 0$ (équation caractéristique associée à une équation différentielle du second ordre).

Résolution

$$\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 13 = 16 - 52 = -36 < 0.$$

$$\sqrt{-\Delta} = \sqrt{36} = 6.$$

Les solutions sont $r_1 = (-4 - 6i)/2 = -2 - 3i$ et $r_2 = (-4 + 6i)/2 = -2 + 3i$.

L'équation admet deux solutions complexes conjuguées : $r_1 = -2 - 3i$ et $r_2 = -2 + 3i$.

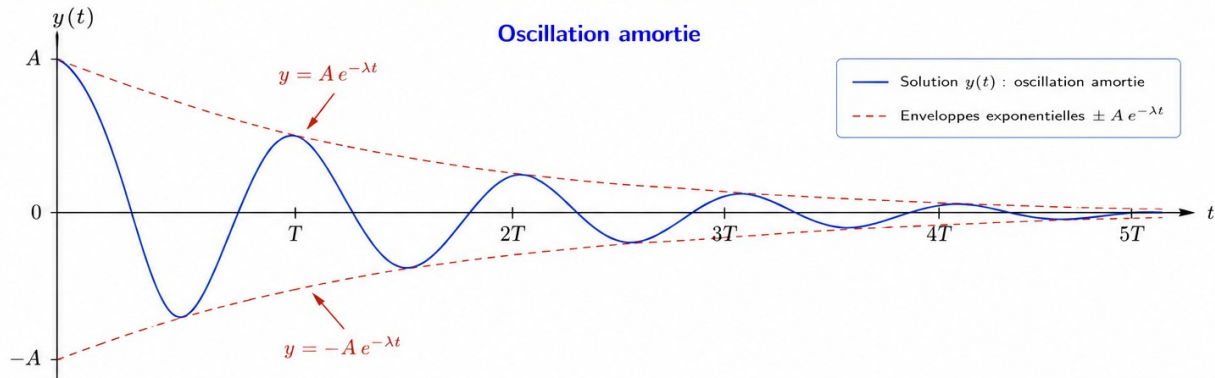
Applications métiers (Travaux Publics) : *Modélisation de phénomènes continus : charge/décharge d'un condensateur, tassement différé d'un sol, refroidissement d'un matériau (béton en cours de prise), vibrations amorties d'un ouvrage.*

2J3 — Équations différentielles linéaires du 2nd ordre à coefficients constants

2J3 — Équations différentielles linéaires du 2^{ed} ordre à coefficients constants

On considère l'équation différentielle linéaire du 2^d ordre à coefficients constants :

$$y'' + 2\lambda y' + \omega_0^2 y = 0 \quad (\lambda > 0, \quad \omega_0 > 0)$$



Forme de la solution (cas $\lambda^2 < \omega_0^2$)

La solution générale s'écrit :

$$y(t) = e^{-\lambda t} (C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t))$$

avec $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \quad (> 0)$

C_1 et C_2 sont des constantes réelles déterminées par les conditions initiales.

Interprétation

- Le système oscille avec une pulsation ω .
- L'amplitude décroît exponentiellement au cours du temps avec le facteur $e^{-\lambda t}$.
- Plus λ est grand, plus l'amortissement est rapide.

Exemple numérique

Prenons $\lambda = 0,4$ et $\omega_0 = 2$.

Alors $\omega = \sqrt{2^2 - 0,4^2} = \sqrt{3,84} \approx 1,96$.

La solution représentée correspond à

$$y(t) = e^{-0,4t} \cos(1,96 t)$$

avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.



À retenir : Pour $\lambda > 0$ et $\lambda^2 < \omega_0^2$, la solution est une oscillation amortie : la réponse du système oscille et tend vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$. Les enveloppes $\pm A e^{-\lambda t}$ bornent la solution.

Ces équations modélisent des phénomènes vibratoires ou oscillants (oscillateurs mécaniques, circuits électriques comportant une bobine et un condensateur) et généralisent au second ordre l'étude menée pour le premier ordre.

Forme générale

On étudie les équations de la forme $a y'' + b y' + c y = d(t)$, où a, b, c sont des constantes réelles ($a \neq 0$) et d une fonction continue à valeurs réelles, du type polynôme, exponentielle ($t \mapsto \alpha e^{\lambda t}$) ou sinusoïde ($t \mapsto \cos(\omega t + \varphi)$ ou $t \mapsto \sin(\omega t + \varphi)$).

Équation caractéristique

À l'équation homogène $a y'' + b y' + c y = 0$ est associée l'équation caractéristique $a r^2 + b r + c = 0$ (équation du second degré, cf. notion 2J2). Selon le signe du discriminant Δ de cette équation :

- si $\Delta > 0$, racines réelles distinctes r_1, r_2 : solution générale $y(t) = K_1 e^{(r_1 t)} + K_2 e^{(r_2 t)}$;
- si $\Delta = 0$, racine double r_0 : solution générale $y(t) = (K_1 + K_2 t) e^{(r_0 t)}$;
- si $\Delta < 0$, racines complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$: solution générale $y(t) = e^{(\alpha t)} (K_1 \cos(\beta t) + K_2 \sin(\beta t))$, K_1 et K_2 étant des constantes réelles.

Solution particulière

Comme pour le premier ordre, la solution générale de l'équation complète s'obtient en ajoutant une solution particulière à la solution générale de l'équation homogène ; la forme de cette solution particulière est donnée lorsque nécessaire.

Conditions initiales

Deux conditions initiales (par exemple $y(0)$ et $y'(0)$) sont nécessaires pour déterminer une solution unique, car la solution générale comporte deux constantes.

Outils

On résout ces équations à la main dans les cas simples et à l'aide d'un logiciel de calcul formel dans tous les cas ; on représente à l'aide d'un logiciel la famille des courbes représentatives des solutions.

Exemple résolu

Énoncé

Un système oscillant vérifie l'équation différentielle $y'' + 4y' + 13y = 0$, avec les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = -2$.

1) Résoudre l'équation caractéristique associée (on rappelle qu'on a trouvé, notion 2J2, les racines $r_1 = -2-3i$ et $r_2 = -2+3i$).

2) En déduire la forme de la solution générale de l'équation différentielle.

Résolution

1) L'équation caractéristique est $r^2 + 4r + 13 = 0$, dont les racines complexes conjuguées, calculées à la notion 2J2, sont $r = -2 \pm 3i$ (soit $\alpha = -2$ et $\beta = 3$).

2) Les racines étant complexes conjuguées ($\Delta < 0$), la solution générale est de la forme :

$y(t) = e^{(-2t)} (K_1 \cos(3t) + K_2 \sin(3t))$, K_1 et K_2 étant des constantes réelles à déterminer à l'aide des conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = -2$. On reconnaît la forme caractéristique d'une oscillation amortie (le facteur $e^{(-2t)}$ traduit l'amortissement, le terme en cosinus/sinus traduit l'oscillation de pseudo-pulsation 3 rad/s).

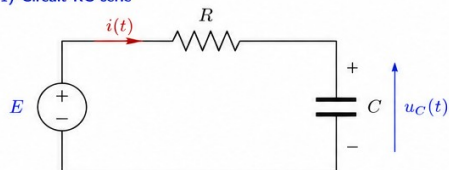
Applications métiers (Travaux Publics) : *Modélisation de phénomènes continus : charge/décharge d'un condensateur, tassement différé d'un sol, refroidissement d'un matériau (béton en cours de prise), vibrations amorties d'un ouvrage.*

2J4 — Modélisation pluridisciplinaire par équations différentielles

2J4 — Modélisation pluridisciplinaire par équations différentielles

La charge d'un condensateur dans un circuit RC série peut être modélisée par une équation différentielle du 1^{er} ordre.

1) Circuit RC série



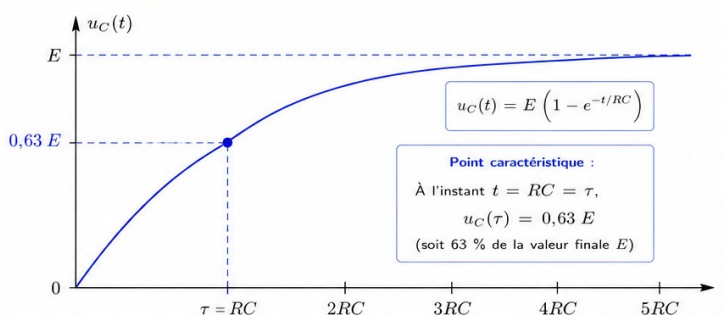
$u_C(t)$: tension aux bornes du condensateur
 $i(t)$: intensité du courant dans le circuit

2) Modélisation par équation différentielle

Loi des mailles : $E = Ri + u_C$
 Relation du condensateur : $i = C \frac{du_C}{dt}$
 D'où l'équation différentielle : $RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E$

Solution pour $u_C(0) = 0$ (condensateur déchargé)
 $u_C(t) = E \left(1 - e^{-t/RC}\right)$ pour $t \geq 0$
 $\tau = RC$: constante de temps (en s)

3) Courbe de charge du condensateur



Point caractéristique :

À l'instant $t = RC = \tau$,
 $u_C(\tau) = 0,63 E$
 (soit 63 % de la valeur finale E)

Interprétation

- $u_C(t)$ croît exponentiellement de 0 vers E .
- La constante de temps $\tau = RC$ détermine la rapidité de la charge.
- Au bout d'environ 5τ , le condensateur est pratiquement chargé : $u_C(5\tau) \approx 0,99 E$.

4) Exemple numérique

$E = 12 \text{ V}$; $R = 2,0 \text{ k}\Omega$; $C = 100 \mu\text{F}$
 $\tau = RC = 0,20 \text{ s}$
 $u_C(t) = 12 \left(1 - e^{-t/0,20}\right) \text{ (V)}$

$t \text{ (s)}$	0	τ	2τ	3τ	5τ
$u_C(t) \text{ (V)}$	0	7,6	10,4	11,4	11,9
	(0%)	(63%)	(86%)	(95%)	(99%)

5) Applications

- Électronique : circuits de temporisation, filtrage.
- Physique : charge de condensateurs, thermiques (échauffement d'un corps).
- Chimie : cinétique de réactions du 1^{er} ordre.
- Biologie : modélisation de certains processus d'accumulation.



À retenir : Les équations différentielles permettent de décrire l'évolution temporelle de grandeurs dans de nombreux systèmes réels. Ici, l'équation du 1^{er} ordre modélise une approche exponentielle vers un état d'équilibre.

La mise en équation d'un phénomène physique continu, issu d'une autre discipline (mécanique, électricité, thermique), constitue l'aboutissement naturel de ce module et renforce les liens entre les enseignements de mathématiques et de physique-chimie.

Démarche de modélisation

Face à un phénomène physique continu, on établit d'abord la loi physique reliant la grandeur étudiée à sa vitesse de variation (loi de refroidissement, loi des mailles pour un circuit RC ou RLC , principe fondamental de la dynamique pour un oscillateur mécanique), ce qui fournit l'équation différentielle du modèle. On résout ensuite cette équation (à la main ou à l'aide d'un logiciel) avant d'interpréter la solution obtenue dans le contexte physique initial.

Exemples de mise en équation

Charge d'un condensateur à travers une résistance (circuit RC) : équation du premier ordre. Décharge d'un condensateur dans un circuit comportant une bobine et une résistance (circuit RLC) : équation du second ordre, pouvant présenter un régime oscillant amorti. Tassement différé d'un sol sous une charge constante : équation du premier ordre, analogue à un refroidissement. Vibrations amorties d'un ouvrage soumis à une excitation : équation du second ordre.

Interprétation de la solution

Selon les paramètres du modèle (signe et valeur des racines de l'équation caractéristique, dans le cas du second ordre), on interprète le comportement obtenu : retour rapide ou lent à l'équilibre, présence ou non d'oscillations, amortissement plus ou moins marqué — autant d'éléments utiles pour dimensionner ou choisir un dispositif technique.

Exemple résolu

Énoncé

La charge d'un condensateur de capacité C à travers une résistance R , alimenté par un générateur de tension constante E , vérifie l'équation différentielle $RC \times u' + u = E$, où $u(t)$ est la tension aux bornes du condensateur, avec $u(0) = 0$.

1) Mettre cette équation sous la forme $a y' + b y = c(t)$ étudiée à la notion 2J1, avec $y = u$.

2) On admet que la solution est $u(t) = E (1 - e^{-t/(RC)})$. Pour $R = 1000 \Omega$, $C = 2 \times 10^{-3} \text{ F}$ et $E = 12 \text{ V}$, calculer $u(2)$ (en secondes), arrondi à 10^{-2} près, et interpréter.

Résolution

1) $RC \times u' + u = E$ s'écrit $u' + (1/(RC)) \times u = E/(RC)$, de la forme $a y' + b y = c(t)$ avec $a = 1$, $b = 1/(RC)$ et $c(t) =$

$E/(RC)$, constante ici.

2) $RC = 1000 \times 2 \times 10^{-3} = 2$ (en secondes). $u(2) = 12 \times (1 - e^{(-2/2)}) = 12 \times (1 - e^{-1}) \approx 12 \times (1 - 0,3679) \approx 12 \times 0,6321 \approx 7,59$ V.

Après 2 secondes (soit une durée égale à la constante de temps RC), la tension aux bornes du condensateur atteint environ 7,59 V, soit environ 63 % de la tension finale $E = 12$ V, résultat caractéristique de la charge d'un condensateur à travers une résistance.

Applications métiers (Travaux Publics) : *Modélisation de phénomènes continus : charge/décharge d'un condensateur, tassement différé d'un sol, refroidissement d'un matériau (béton en cours de prise), vibrations amorties d'un ouvrage.*

Exercices d'application

Ex. J1 — Refroidissement d'une dalle de béton

Énoncé

L'écart de température $\theta(t)$ (en °C), entre une dalle de béton en cours de refroidissement et l'air ambiant, vérifie $\theta' = -0,15 \theta$ avec $\theta(0) = 20$.

- 1) Résoudre cette équation différentielle.
- 2) Calculer, arrondi à 10^{-2} près, le temps nécessaire pour que l'écart de température descende à 5 °C (on pourra utiliser la fonction $\ln$).

Corrigé

1) Solution générale de $\theta' + 0,15\theta = 0$: $\theta(t) = K e^{(-0,15t)}$. $\theta(0)=20$ donne $K=20$. Donc $\theta(t) = 20 e^{(-0,15t)}$.

2) On cherche t tel que $20 e^{(-0,15t)} = 5$, soit $e^{(-0,15t)} = 5/20 = 0,25$.

En passant au logarithme népérien : $-0,15t = \ln(0,25)$, donc $t = \ln(0,25) / (-0,15) = (-1,3863)/(-0,15) \approx 9,24$.

L'écart de température descend à 5 °C au bout d'environ 9,24 heures.

Ex. J2 — Oscillations amorties d'un plancher provisoire

Énoncé

Les vibrations d'un plancher provisoire de chantier, soumis à une excitation, sont modélisées par $y'' + 2y' + 5y = 0$.

- 1) Écrire l'équation caractéristique associée et calculer son discriminant.
- 2) Résoudre l'équation caractéristique dans $\mathbb{C}$ et en déduire la forme de la solution générale de l'équation différentielle.

Corrigé

1) Équation caractéristique : $r^2 + 2r + 5 = 0$. $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 5 = 4 - 20 = -16 < 0$.

2) $\sqrt{-\Delta} = \sqrt{16} = 4$. Racines : $r = (-2 \pm 4i)/2 = -1 \pm 2i$ (soit $\alpha = -1$, $\beta = 2$).

Les racines étant complexes conjuguées, la solution générale de l'équation différentielle est :

$y(t) = e^{(-t)} (K_1 \cos(2t) + K_2 \sin(2t))$, K_1 et K_2 étant des constantes réelles déterminées par les conditions initiales. On reconnaît une oscillation amortie, de pseudo-pulsation 2 rad/s, l'amortissement étant d'autant plus rapide que le coefficient de $e^{(-t)}$ est marqué.

Évaluation de fin de module (QCM)

Question 1. La solution générale de l'équation différentielle $y' + b y = 0$ ($a \neq 0$) est de la forme :

A. $y(t) = K t$

B. $y(t) = K e^{-(b/a)t}$ ✓ (réponse correcte)

C. $y(t) = K \sin(t)$

D. $y(t) = K/t$

Explication : L'équation homogène $y' + b y = 0$ a pour solution générale $y(t) = K e^{-(b/a)t}$.

Question 2. Pour une équation différentielle du 1er ordre, combien de conditions initiales sont nécessaires pour déterminer une solution unique ?

A. Aucune

B. Une seule ✓ (réponse correcte)

C. Deux

D. Cela dépend du second membre

Explication : La solution générale d'une équation du 1er ordre comporte une seule constante : une condition initiale suffit à la déterminer.

Question 3. Pour une équation différentielle linéaire du 2nd ordre à coefficients constants, si l'équation caractéristique a un discriminant $\Delta < 0$ (racines $\alpha \pm i\beta$), la solution générale est de la forme :

A. $y(t) = K_1 e^{\alpha t} + K_2 e^{\beta t}$

B. $y(t) = (K_1 + K_2 t) e^{\alpha t}$

C. $y(t) = e^{\alpha t} (K_1 \cos(\beta t) + K_2 \sin(\beta t))$ ✓ (réponse correcte)

D. $y(t) = K_1 \cos(\alpha t) + K_2 \sin(\beta t)$

Explication : Pour $\Delta < 0$ (racines complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$), la solution générale est $y(t) = e^{\alpha t} (K_1 \cos(\beta t) + K_2 \sin(\beta t))$.

Question 4. Dans le modèle de charge d'un condensateur à travers une résistance (circuit RC), l'équation différentielle obtenue est de quel ordre ?

A. Ordre 0

B. 1er ordre ✓ (réponse correcte)

C. 2nd ordre

D. 3ème ordre

Explication : La charge d'un condensateur à travers une résistance conduit à une équation différentielle linéaire du 1er ordre.

Question 5. Un système décrit par $y'' + 2y' + 5y = 0$, dont l'équation caractéristique a des racines complexes conjuguées à partie réelle négative, présente un comportement :

A. Divergent sans oscillation

B. Oscillant amorti (retour progressif à l'équilibre en oscillant) ✓ (réponse correcte)

C. Constant

D. Oscillant d'amplitude croissante

Explication : Une partie réelle négative des racines complexes conjuguées traduit un amortissement : le système oscille avec une amplitude qui décroît progressivement vers 0.